Die Verteilung der Primzahlen

nach neuen Gesichtspunkten behandelt.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

Kgl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 1. Mai 1905

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Carl Raimund Wallner
aus Augsburg.

München 1905.
Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Die Verteilung der Primzahlen

nach neuen Gesichtspunkten behandelt.

Inaugural-Dissertation

einer

hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

Kgl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 1. Mai 1905

zur

Erlangung der Doktorwürde

ACAD.
LUDWIG MAX.
BIBL.

vorgelegt von

Carl Raimund Wallner
aus Augsburg.

München 1905.
Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549027_0127

Ich würde es nicht gewagt haben, nach Riemanns berühmter Arbeit über die Verteilung der Primzahlen folgenden Versuch auszuarbeiten, wenn nicht meine Arbeit auf völlig anderm Boden stehen würde. Die folgenden Untersuchungen haben mit den Riemann'schen und den daran anschliessenden keinerlei Verwandtschaft, hören sozusagen dort auf, wo Riemann anfängt; das Endresultat des Ganzen hätte auf Grund bekannter Sätze in wenigen Zeilen entwickelt werden können. Aber mir war es weniger um die Lösung des vielumstrittenen Problems als gerade um eine möglichst systematische, allgemeine und von Kunstgriffen oder Gedankensprüngen freie Behandlung desselben zu tun. Ich suchte den Weg zur Lösung möglichst methodisch zu gestalten, um auch andre Probleme der analytischen Zahlentheorie auf diesem nämlichen Wege untersuchen zu können. Dazu war es nötig, die Aufgabe möglichst elementar und nur mit solchen Hilfsmitteln zu behandeln, die mir aus der Natur des gegebenen Problems von selbst zu erwachsen schienen; die bisherigen Methoden der analytischen Zahlentheorie haben ja vielfach etwas Zufälliges an sich, so dass sie die Richtigkeit irgend eines Satzes zwar wohl erkennen lassen, aber keine tiefere Einsicht in sein Zustandekommen gewähren können.

Die Anregung zur Abfassung dieser Arbeit empfing ich von Sr. Magnifizenz Herrn Universitätsrektor Dr. F. Lindemann, dem ich hiefür, wie für die wohlwollende Anteilnahme an der Ausführung, zu wärmstem Danke verpflichtet bin.

Jedes mathematische Problem bedingt in sich gewisse Fundamentalprobleme, die immer erhalten bleiben, wie man auch die ursprüngliche Fassung des betreffenden Problems verändern mag. Ein echter Bruch ist z. B. nie als Summe ganzer Zahlen allein darstellbar; die Forderung mit einer Zahl eine andere, die kein ganzzahliges Vielfache von ihr ist, zu teilen, muss bei allen den unbegrenzt vielen Umgestaltungen, die der betreffende Bruch erfahren kann, erhalten bleiben. Das Problem, eine Quadratwurzel numerisch zu berechnen, führt immer wieder auf die Ausrechnung einer Quadratwurzel; die Behandlung einer irreduziblen Gleichung 3. Grades führt immer wieder auf eine solche Gleichung.

Die Lösung irgend eines vorgelegten Problems wird um so leichter, planmässiger geschehen können und um so klarer und durchsichtiger sein, je deutlicher bei seiner Behandlung die erwähnten Fundamentalprobleme hervortreten. Es muss daher alles an ihrer Auffindung gelegen sein; die Lösung des Problems selbst wird dann verhältnismässig geringe Schwierigkeiten bieten.

Diese Erwägungen bildeten die leitenden Gedanken für die folgende Untersuchung, die sich die Aufsuchung eines Gesetzes für die Verteilung der Primzahlen zur Aufgabe stellt. Als Charakteristikum der „Verteilung“ wurde die Anzahl der Primzahlen zwischen 1 und einer beliebig vorgegebenen Zahl benutzt. Bei dieser Formulierung der Aufgabe kann das ihr zugrunde liegende nicht vermeidbare Fundamentalproblem bereits erkannt werden. Um nämlich die Aufgabe zu lösen, müssen die Primzahlen in ihrer Gesamtheit, mit andern Worten die unbegrenzte Zahlenmenge 2, 3, 5, . . ., vorgelegt, gegeben sein, wobei die einzelnen Terme dieser Menge ihrer Grösse nach angeordnet sind; verlangt ist anzugeben, wie viele Terme dieser wohlgeordneten Menge zwischen 1 und eine gegebene Zahl fallen.

Unsere Aufgabe wird demnach in folgendem bestehen: wir

haben zunächst die Menge der Primzahlen zu bilden, analytisch darzustellen, und dann die eigentliche Aufgabe, die Abzählung der Terme zu leisten. Menge und Abzählung sind die beiden fundamentalen Begriffe, die uns die Lösung unserer Aufgabe ermöglichen werden. Nach dem eingangs Gesagten wird diese Lösung gerade wegen der fundamentalen Bedeutung der Begriffe Menge und Abzählung für unser Problem — allerdings wieder auf diese selbst hinauskommen, sich nur durch sie darstellen lassen, aber wir suchen eben einfachere bequemere Mengen, leichtere Abzählungen zu benützen, die der Abzählung an der Primzahlenmenge selbst gleichwertig sind.[1]) Und nur in diesem Sinne können wir von einer Lösung des Problems sprechen.

Wir wollen die zuletzt gemachten Ausführungen dahin spezialisieren, dass wir uns die Aufgabe stellen, die Primzahlenmenge durch die natürliche Zahlenmenge 1, 2, 3, 4 . . . auszudrücken und die nötigen Abzählungen, womöglich, auf eine einzige abzählende Funktion E (x), d. i. die grösste in x enthaltene ganze Zahl, zurückzuführen. Der erste Teil dieser Aufgabe verlangt eine Menge durch eine andere analytisch auszudrücken, wir müssen deshalb erst eine eigene Mengenrechnung schaffen, um Relationen, Gleichungen zwischen Mengen schreiben zu können. Die eigentliche Operation der Abzählung in einem bestimmten Intervall wird die geringste Mühe verursachen, sie ist etwa der Bildung eines Funktionswertes für einen ganz bestimmten Wert der Variabeln vergleichbar, wenn die Funktion als ein die Variable enthaltender analytischer Ausdruck definiert ist.

---

[1]) Wenn nur eine einzige Abzählung in einem ganz bestimmten Intervall geleistet werden soll, so ist es denkbar, dass diese Abzählung ganz ohne Mengenbegriff geleistet werden kann. Soll aber die Abzählung für ein variables Intervall vorgenommen werden, d. h. soll das Gesetz der Verteilung der Primzahlen selbst gefunden werden, so muss implizit der Mengenbegriff immer zur Anwendung gelangen.

Aus dem Gesagten ist ersichtlich, dass die im folgenden zu entwickelnde Mengen„rechnung“ nichts mit Cantors Mengen„lehre“ [1]) und daran anknüpfenden Untersuchungen zu tun hat. Während letztere nämlich alle möglichen Mengen zu ermitteln und nach gewissen Gesichtspunkten zu beschreiben und einzuteilen sucht, beschränken wir uns von vornherein (S. 9) auf eine ganz spezielle Art abzählbarer Mengen; unser Ziel ist, derartige Mengen mit Hilfe gewisser symbolischer Operationen in neue Mengen mit anderen Elementen überzuführen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass anscheinend zuerst Meissel auf den Gedanken gekommen ist, die Abzählung der Primzahlen wieder auf Abzählungen zurückzuführen; [2]) was seine Behandlung der Aufgabe von der unseren unterscheidet, ist der Umstand, dass Meissel schliesslich doch wieder Abzählungen an der Primzahlenmenge selbst benützt, während unsere Lösung keinerlei Kenntnis der Primzahlverteilung voraussetzt und eben deshalb gewissermassen als Definition derselben angesehen werden kann.

Das mengenbildende Element ist das Objekt schlechthin, d. h. die Menge besteht aus einer gewissen Anzahl von irgendwelchen Objekten, die nur der Bedingung gehorchen müssen, voneinander unterscheidbar zu sein. Die Menge entsteht aus diesen Objekten, ihren Elementen, durch blosse Aneinanderreihung, eine Operation, die wir im folgenden mit ω bezeichnen werden. Die Operation ω fügt also zwei beliebige Objekte a und b zu der „Menge a ω b“ mit den „Elementen“ a und b zusammen. a und b brauchen dabei keine Zahlen zu sein; werden aber speziell Zahlen zu einer Menge vereinigt, so hat das so entstehende

---

[1]) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften. I. A. 5.

[2]) Seine Methode ist in neueren Auflagen von Serrets Algebra Bd. II ausführlich dargestellt.

Gebilde keinen Zahlenwert,[1]) und der Zahlenwert der einzelnen Elemente hat dabei nur den Zweck, dieselben als wohldefinierte Objekte zu kennzeichnen. Darin liegt der Unterschied zwischen der Operation ω und den Operationen der gewöhnlichen Arithmetik, Addition und Multiplikation, die Zahlen zu Zahlen vereinigen. Die Operation ω hingegen vereinigt Mengen zu Mengen, wenn es gestattet ist, die einzelnen Elemente einer Menge selbst noch Mengen zu nennen.

Wir definieren:

$$(a\omega b)\,\omega c = a\omega b\omega c.$$

Allgemeiner

$$(a\omega b\omega \ldots)\,\omega\,(a'\omega b'\omega \ldots) = a\omega b\omega \ldots\, \omega a'\omega b'\omega \ldots$$

durch diese Gleichung wird erklärt, was wir unter dem Ausdruck $\mathfrak{M}\,\omega\,\mathfrak{M}'$ verstehen wollen, wo $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ Mengen sind.

Sieht man von der Anordnung der Elemente ab, so hat man:

$$a\omega b = b\omega a,$$

so dass also ω eine assoziative und kommutative Operation vorstellt.

Werden lauter gleiche Objekte a (die Zahlen oder selbst wieder Mengen sein können) zu einer Menge vereinigt, so wollen wir zur Abkürzung schreiben:

$$a\omega a\omega \ldots \text{ (n mal)} = a\underline{|n};$$

n heisst im folgenden der „Häufigkeitskoeffizient“ von a.

Es ist vielleicht der Hinweis, dass $a\underline{|n}$ und $n\underline{|a}$ ganz verschiedene Dinge sind, nicht uninteressant. Man vergleiche damit die Addition, durch deren Wiederholung wieder eine assoziative und kommutative Rechnungsart, die Multiplikation, entsteht.

Wir können jetzt sofort folgende Gleichungen anschreiben:

$$a\underline{|n}\,\omega\,a\underline{|n'} = a\underline{|n+n'};\quad (a\omega b)\underline{|n} = (a\underline{|n})\,\omega\,(b\underline{|n});\quad \ldots\quad (1$$

$$(a\underline{|n})\underline{|n'} = a\underline{|nn'} = (a\underline{|n'})\underline{|n};$$

---

[1]) Versuche den Mengenbegriff als erweiterten Zahlbegriff zu fassen, habe ich, als allzu gekünstelt, wieder aufgegeben.

Diese Gleichungen gelten in gleicher Weise, ob a Zahlen oder Mengen bedeutet.

Als Umkehrung von ω sei die Operation ϖ, d. i. die Hinwegnahme eines Elementes von einer gegebenen Menge, definiert:

$$(a\,\omega\,b)\,\varpi\,b = a;$$

Man sieht leicht, dass die Rechnungsgesetze für das Zeichen ϖ ganz analog denen sind, welche für das Minuszeichen der Arithmetik gelten, dass ferner ϖa — analog den negativen Zahlen — rein formal als selbständiger Begriff eingeführt werden kann. Jedes Element einer Menge ist dann im Sinne unserer Mengenrechnung mit den Vorzeichen ω oder ϖ behaftet.

Es seien nur die vorzüglichsten Rechnungsregeln erwähnt:

$$\varpi\,(a\,\omega\,b) = (\varpi a)\,\omega\,(\varpi b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

wofür wir einfach $\varpi a\,\varpi b$ schreiben wollen;

$$\varpi\,(\varpi a) = \omega a; \quad \varpi\,(a\,\underline{|}\,n) = (\varpi a)\,\underline{|}\,n.$$

Zum Beweis dieser Sätze dient das Prinzip, dass bei einer Gleichung auf beiden Seiten dieselbe Menge hinzugefügt oder hinweggenommen werden kann.

In natürlicher Konsequenz unserer Festlegungen definieren wir ein der Null analoges Gebilde:

$$a\,\varpi\,a = \succ\!|\!\prec \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3$$

Als wichtigste Eigenschaft ist zu merken

$$a\,\omega \succ\!|\!\prec = a;$$

Schliesslich sei durch die Gleichung:

$$\left(\frac{a}{\underline{|}\,n}\right)\underline{|}\,n = a$$

ein weiteres Symbol $\frac{a}{\underline{|}\,n}$ definiert, das im folgenden eine grosse Rolle spielen wird. Es ist leicht ersichtlich, dass $\frac{(a\,\underline{|}\,n)}{\underline{|}\,n} = a$.

Wir können jetzt rein formal die Gleichung $(a\,\underline{|}\,n)\,\underline{|}\,n' = a\,\underline{|}\,n\,n'$ auf negative und gebrochene n und n′ ausdehnen; ja wir können in Übereinstimmung mit dem vorausgehenden definieren:

$$a\,\underline{|-n} = \omega\,(a\,\underline{|n}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

$$a\,\underline{|\frac{1}{n}} = \frac{a}{\underline{|n}}.$$

Endlich sei darauf hingewiesen, dass wir in dem Gebilde $\frac{a}{\underline{|n}}$, sobald a nicht eine aus n gleichen Teilmengen bestehende Menge bedeutet, eine weitere Begriffsbildung gewonnen haben.

Wir haben im vorausgehenden durch eine einfache Analyse des Begriffes „Menge" eine Gruppe von Gleichungen definiert, die uns den Prozess der Mengenbildung rechnerisch darstellen sollen, und haben dann rein formal unsere ursprünglich einfache Bezeichnungsweise noch beträchtlich ausgebildet. Trotzdem würden wir mit dieser einen Gruppe von Definitionen nicht über blosse Identitäten und Trivialitäten hinauskommen. Um mit Mengen rechnen zu können, d. i. Gleichungen zwischen Mengen anzuschreiben, müssen wir imstande sein, ein und dieselbe Menge auf zwei verschiedene Weisen auszudrücken; dann erst wird die Gleichsetzung beider Darstellungen wirklich etwas aussagen. Wir müssen also nach einem zweiten mengenbildenden Mittel suchen, und sind, da uns der Begriff der Menge selbst ein solches Mittel nicht mehr an die Hand gibt, ganz auf unser Gutdünken angewiesen. Hierin allein liegt die Willkür in der Behandlung unseres Problems.

Im folgenden wollen wir nur mehr Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ . . . betrachten, deren Elemente a, b, c . . . algebraische Zahlen sind; wir setzen ferner die Anzahl dieser Elemente einstweilen endlich voraus.

Unter diesen Einschränkungen definieren wir eine Operation zur Verknüpfung von Mengen, die in dem Falle, dass jede Menge nur ein einziges Objekt besitzt, in die gewöhnliche Addition übergeht, und die wir deshalb auch im allgemeinen

Fall (da eine Verwechslung ausgeschlossen ist) der Kürze halber mit Addition bezeichnen werden, durch die Gleichung:

$$(a, b, c, \ldots) + k = (a + k, b + k, c + k, \ldots) \quad . \quad . \quad (5$$

wo der Einfachheit halber statt des Zeichens ω ein Komma gesetzt wurde.

Als erweiterte Definition wollen wir diese Gleichung auch auf den Fall ausdehnen, dass k selbst eine Menge $(a', b', c', \ldots)$ bedeutet.

Es ergibt sich dann:

$$(a, b, \ldots) + (a', b', \ldots) = a + a', b + a', \ldots$$
$$a + b', b + b', \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

das heisst: Zwei Mengen werden addiert, indem man jedes Element der einen Menge zu jedem Element der anderen Menge addiert und die so erhaltenen Zahlen zu einer neuen Menge vereinigt.

Fasst man jetzt einzelne Elemente in Gruppen zu Teilmengen $\mathfrak{M}_i$ zusammen, so wird ersichtlich, dass:

$$(\mathfrak{M}_1 \omega \mathfrak{M}_2 \omega \ldots) + (\mathfrak{M}'_1 \omega \mathfrak{M}'_2 \omega \ldots) = (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}'_1)$$
$$\omega (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}'_1) \ldots \omega (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}'_2) \omega (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}'_2) \ldots \quad . \quad (5a$$

Man sieht ferner ohne weiteres, dass in diesen Gleichungen (5; 5a) die einzelnen Summanden vertauscht werden können.

Sind die beiden Mengen völlig gleich, so hat man nach derselben Vorschrift zu verfahren. Wir bezeichnen jedoch die so erhaltene Menge nicht etwa als doppelte Menge, da wir sonst die folgende Definition für das Produkt zweier Mengen nicht brauchen könnten, sondern lassen die Summe in ihrer ursprünglichen Form stehen: $(a, b, \ldots) + (a, b, \ldots)$ oder auch $(a, b, \ldots) + (a, b, \ldots)'$.

Als Definition für die Multiplikation zweier Mengen setzen wir die Gleichung fest:

$$(a, b, c, \ldots) \cdot k = (a.k, b.k, c.k, \ldots),$$

gleichgiltig, ob k selbst wieder eine Menge oder nur eine

gewöhnliche Zahl ist. Wir müssten, wie ersichtlich, auf diese sehr fruchtbare Definition verzichten, wenn wir die Menge $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}$ mit $2\mathfrak{M}$ bezeichnen wollten.

Diese Festsetzungen[1]) sind so getroffen, dass sich sowohl die sog. Addition wie die Multiplikation der Mengen distributiv zur Operation ω verhält. Darin liegt ein wesentlicher Gegensatz zu den Rechnungsarten der gewöhnlichen Arithmetik; diese besitzen nämlich alle nur eine einzige (bis auf eine willkürliche Konstante bereits völlig bestimmte) übergeordnete Rechnungsart, welche die Eigenschaft der Distributivität besitzt. Wenn es uns hier möglich war, gleich zwei Rechnungsarten diese Eigenschaft anzudefinieren, so rührt dies von der überaus losen Verknüpfung her, die durch die Operation ω geschaffen wird. Während nämlich, wie schon erwähnt, die arithmetischen Rechnungsarten Zahlen wieder zu Zahlen verbinden, stellt die Operation ω Zahlen lediglich als Individuen nebeneinander, ohne sie enger zu verschweissen. Beispielshalber werden die Zahlen 2 und 3 durch die Addition zu 5 vereinigt, und niemand kann nachträglich die beiden Summanden wiedererkennen; es gibt aber keine Menge, deren Elemente andere Zahlenwerte als 2 und 3 haben, die mit $2\,\omega\,3$ identisch wäre. Wir können dies auch so ausdrücken: Verknüpft man Zahlen a, b, ... untereinander, so sind nach Ausführung der Verknüpfung im Falle der Operation ω die Elemente a, b, ... noch erkennbar, im Falle einer arithmetischen Rechnungsart nicht.

Es erübrigt noch, die wichtigsten Formeln zusammenzustellen, die aus obigen Definitionen (5) fliessen.

Zunächst folgt unmittelbar aus der Definition der Addition

$$(a|\underline{m}) + b = (a + b)|\underline{m}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6$$

also $(a|\underline{m}) + b = a + (b|\underline{m})$;

[1]) Wir könnten offenbar noch weitere derartige Verknüpfungen definieren.

Diese Gleichung können wir auch noch für negative und gebrochene m gelten lassen, da die angedeuteten Operationen in diesem Falle zunächst noch keinen Sinn besitzen; wir setzen aber einen solchen mit Rücksicht auf das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze durch die Gleichungen (6) fest; in letzterem Falle haben wir:

$$\frac{a}{m} + b = a + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6a$$

Ferner ist: $a\left|\frac{}{m}\right. + b\left|\frac{}{m'}\right. = (a+b)\left|\frac{}{mm'}\right.$ . . . . . (6b

Ebenso folgt aus unseren Definitionen, dass

$$[\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2] + \mathfrak{M}_3 = [\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3] + \mathfrak{M}_1 = [\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_1] + \mathfrak{M}_2,$$

da alle drei Ausdrücke bei wirklicher Ausführung der vorgeschriebenen Additionen genau dieselbe Menge ergeben, die wir kurz mit $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3$ bezeichnen wollen.

Beachtenswert ist ferner folgende Gleichung:

$$\gtrless + a = (b, \omega b) + a = (b + a, \omega b + a) \quad \ldots \quad (7$$
$$= (b + a, \omega(b + a)) = \gtrless.$$

Nach der Definition der Multiplikation zweier Mengen ist es klar, dass in allen diesen Gleichungen das Additionszeichen durch das Multiplikationszeichen ersetzt werden kann.

Endlich ist darauf hinzuweisen, dass $(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2) \cdot \mathfrak{M}_3$ und $(\mathfrak{M}_1\,\mathfrak{M}_3) + (\mathfrak{M}_2\,\mathfrak{M}_3)$ ganz verschiedene Gebilde sind, wie sofort ersichtlich wird, wenn man in einem konkreten Fall die vorgeschriebenen Operationen in der durch die Klammern angedeuteten Reihenfolge wirklich ausführt. Die Multiplikation ist also zur Addition nicht mehr distributiv, wenn die einzelnen Glieder des betreffenden Ausdrucks nicht mehr gewöhnliche Zahlen, sondern Mengen sind.

Wir definieren schliesslich noch:

$$(a^\nu, b^\nu, \ldots) = (a, b, \ldots)^\nu \text{ und } \ldots\ldots\ldots \quad (8$$
$$(a, b \ldots)\,(a, b, \ldots)' \ldots (\nu\text{mal}) = (a, b, \ldots)^{[\nu]}$$

Dann gelten folgende Rechnungsregeln:

$(a|m)^\nu = (a^\nu)|\underline{m}$ (auch für negative und gebrochene m); hingegen

$$(a|\underline{m})^{[\nu]} = (a^\nu)|\underline{m}^\nu$$

$$(\mathfrak{M}_1 \,\omega\, \mathfrak{M}_2)^\nu = \mathfrak{M}_1{}^\nu \,\omega\, \mathfrak{M}_2{}^\nu$$

$$(\mathfrak{M}_1 \,\omega\, \mathfrak{M}_2)^{[\nu]} = \mathfrak{M}_1{}^{[\nu]} \left|\underline{\binom{\nu}{0}}\right. \omega\, \mathfrak{M}^{[\nu-1]}\, \mathfrak{M}_2 \left|\underline{\binom{\nu}{1}}\right. \omega \ldots,^1)$$

$$(\mathfrak{M}^\mu)^\nu = \mathfrak{M}^{\mu\nu}$$

$$(\mathfrak{M}^{[\mu]})^{[\nu]} = \mathfrak{M}^{[\mu\nu]}$$

$$\mathfrak{M}^{[\mu]} \cdot \mathfrak{M}^{[\nu]} = \mathfrak{M}^{[\mu+\nu]}$$

$$(\mathfrak{M}^{[\mu]})^\nu = (\mathfrak{M}^\nu)^{[\mu]}$$

$$(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N})^\nu = \mathfrak{M}^\nu \cdot \mathfrak{N}^\nu$$

$$(\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N})^{[\nu]} = \mathfrak{M}^{[\nu]} \cdot \mathfrak{N}^{[\nu]}$$

Man sieht leicht, dass es gelingen würde, $\mathfrak{M}^{[\nu]}$ auch noch für negative und gebrochene ν zu definieren; dies würde jedoch zu dem Begriff der unbegrenzten Menge führen, dem wir uns erst später zuwenden wollen.

Zunächst seien noch einige Beispiele zur Einübung der Rechnungregeln unseres neuen Kalküls aufgeführt. Wir wollen etwa zeigen, wie man symmetrische Funktionen von Zahlen durch Mengen ausdrücken kann, deren Elemente eben diese Zahlen sind. So ist z. B.

$$a + b = \frac{[(a, b) + (a, b)'] \,\omega\, 2\,(a, b)}{|\underline{2}},$$

denn $(a, b) + (a, b)' = 2a, a + b|\underline{2}, 2b$; . . . . . (5)

$2\,(a, b) = 2a, 2b$;

[1]) $(a, b, c, \ldots)^{[\nu]}$ wird daher nach dem sog. polynomischen Lehrsatz gebildet.

Setzt man jetzt $(a, b, c) = \mathfrak{M}$, so ist $(a, b) = \mathfrak{M}\,\omega\,c$, also

$$a + b = \frac{[(\mathfrak{M}\,\omega\,c) + (\mathfrak{M}\,\omega\,c)]\ \omega\ 2\,(\mathfrak{M}\,\omega\,c)}{\underline{|2}}$$

$$= \frac{[(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')\,\omega\,(\mathfrak{M} + \omega c)\,\underline{|2}\,\omega\,(\omega c + \omega c')]\ \omega\ 2\mathfrak{M}\ \omega\ 2c}{\underline{|2}} \quad (5a)$$

$$= \frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')\ \omega\ (\mathfrak{M} + c)\underline{|2}\ \omega\ 2\,\mathfrak{M}\ \omega\ 2c\underline{|2}}{\underline{|2}},$$

da $\omega c + \omega c' = 2c$;[1]) . . . . . (4; 6b)

Daraus folgt

$$a + b + c = \frac{\{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')\,\omega\,(\mathfrak{M} + c)\underline{|2}\ \omega\ 2\,\mathfrak{M}\ \omega\ 2c\underline{|2}\} + c^2)}{2} \quad (6a)$$

$$= \frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + c)\,\omega\,(\mathfrak{M} + 2c)\underline{|2}\ \omega\ (2\,\mathfrak{M} + c)\ \omega\ 3c\,\underline{2}}{\underline{|2}}; \quad (5)$$

Vertauscht man jetzt die Grössen a, b, c unter sich, so bleibt die linke Seite dieser Gleichung ungeändert, auf der rechten wird c durch a und b ersetzt. Auf diese Weise erhält man zwei neue Ausdrücke für $a + b + c$. Dann wird aber:

$$(a + b + c)\underline{|3} = \frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + a)\,\omega\,(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + b)\,\omega\,(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + c)}{\underline{|2}}$$

$$\omega\ (\mathfrak{M} + 2a)\ \omega\ (\mathfrak{M} + 2b)\ \omega\ (\mathfrak{M} + 2c)$$

$$\omega\ \frac{(2\,\mathfrak{M} + a)\ \omega\ (2\,\mathfrak{M} + b)\ \omega\ (2\,\mathfrak{M} + c)}{\underline{|2}}$$

$$\omega\ 3a\ \omega\ 3b\ \omega\ 3c$$

Nach unserer Definition der Addition (5) ist das aber nichts anderes als:

$$\frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''}{\underline{|2}}\ \omega\ (\mathfrak{M} + 2\,\mathfrak{M}')\ \omega\ \frac{(2\,\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')}{\underline{|2}}\ \omega\ 3\,\mathfrak{M};$$

---

[1]) Es ist nämlich:

$$\omega c + \omega c' = c\underline{|1} + c'\underline{|-1} = (c + c)\underline{|(-1)\,(-1)} = 2c\underline{|1};$$

[2]) da $\frac{\mathfrak{M}}{\underline{|2}} + c = \frac{\mathfrak{M} + c}{\underline{|2}}$;

Somit erhalten wir endlich:

$$a + b + c = \frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'') \,\omega\, (\mathfrak{M} + 2\mathfrak{M}')\,\underline{|3} \,\omega\, 3\mathfrak{M}\,\underline{|2}}{\underline{|6}}; \quad (1)$$

Setzt man hierin etwa $c = \gtrless (3)$, so wird die linke Seite der Gleichung ebenfalls gleich $\gtrless (7)$ und $\mathfrak{M} = (a, b)$; dann erhält man leicht

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = (\mathfrak{M} + 2\mathfrak{M}')\,\underline{|3} \,\omega\, 3\,\mathfrak{M}\,\underline{|2};$$

Diese Entwicklungen bleiben richtig, wenn wir alle Additions- durch Multiplikationszeichen ersetzen. (Selbstverständlich muss dann $2c$ oder $2\mathfrak{M}$ durch c^2 und $\mathfrak{M}^2$ ersetzt werden; ebenso $3c$ und $3\mathfrak{M}$ durch c^3 und $\mathfrak{M}^3$ u. s. w. Vgl. [8]).

Noch ein Beispiel sei angeführt. Wir hatten, wenn $\mathfrak{M} = a \,\omega\, b$, die Gleichung:

$$a + b = \frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') \,\omega\, 2\mathfrak{M}}{\underline{|2}}; \text{ daraus erhalten wir:}$$

$$(a + b)^2 = \frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')^2 \omega\, 4\mathfrak{M}^2}{\underline{|2}}\ ^{1}) \quad (8); \text{ Aber auch}$$

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = \left(\frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') \,\omega\, 2\mathfrak{M}}{\underline{|2}}\right) \cdot \left(\frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') \,\omega\, 2\mathfrak{M}}{\underline{|2}}\right)'$$

$$= \frac{(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')^{[2]} \,\omega\, (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}') \cdot 2\mathfrak{M}\,\underline{|2} \,\omega\, (2\mathfrak{M})^{[2]}}{\underline{|4}}; \quad . \quad . \quad (5)$$

Es ist aber auch $a^2 + b^2 = \frac{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}'^2) \,\omega\, 2\mathfrak{M}^2}{\underline{|2}}$. (8; 5)

$$2\,ab = \frac{2\mathfrak{M}\mathfrak{M}' \,\omega\, 2\mathfrak{M}^2}{\underline{|2}},$$

folglich durch Addition (5a; 6b)

$$(a + b)^2 = \frac{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}'^2 + 2\mathfrak{M}\mathfrak{M}') \,\omega\, (2\mathfrak{M}^2 + 2\mathfrak{M}\mathfrak{M}')}{\underline{|4}}$$

$$\omega\, \frac{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{M}'^2 + 2\mathfrak{M}^{2\prime\prime}) \,\omega\, (2\mathfrak{M}^2 + 2\mathfrak{M}'^2)^{\,2})}{\underline{|4}}$$

---

[1]) Hier muss zuerst $(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')$ und daraus $(\mathfrak{M} + \mathfrak{M}')^2$ gebildet werden.

[2]) Hier sind zuerst $\mathfrak{M}^2$, $2\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$, $2\mathfrak{M}^2$ zu berechnen und daraus erst die betreffenden Ausdrücke.

Diese Gleichungen sind durch Auswertung der einzelnen Klammerausdrücke sehr leicht zu verifizieren.

Wir haben bis jetzt unsere Mengenrechnung soweit entwickelt, dass wir mit Leichtigkeit Relationen zwischen verschiedenen Mengen aufstellen können, und sind damit der Lösung unseres Problems schon beträchtlich näher gerückt; indes haben wir einstweilen immer nur mit Mengen von einer endlichen Zahl von Termen zu tun gehabt, während die Mengen, die für unser spezielles Problem in Betracht kommen, die Primzahlenmenge und die natürliche Zahlenmenge, eine unbegrenzte Zahl von Elementen besitzen. Es gilt daher, die entsprechenden Rechnungsgesetze für solche unbegrenzte, oder, wie wir im folgenden immer sagen werden, unendliche Mengen zu definieren.

Wir sagen, dass eine Menge immer dann einen Sinn haben, existieren (konvergieren) solle, wenn jedes der ihr angehörigen bestimmt angebbaren Elemente einen ganz bestimmten endlichen Häufigkeitskoeffizienten besitzt. Wir beschränken uns dabei — ohne dass wir diese Einschränkung nochmals erwähnen — im folgenden ausschliesslich auf Mengen ohne im Endlichen gelegene Häufungspunkte. Wir können ferner jede Menge $\mathfrak{M}$ als Grenzwert einer unbegrenzten Folge von Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ auffassen, wenn für jedes a die Folge der Häufigkeitskoeffizienten $\overset{(a)}{\varkappa_1}, \overset{(a)}{\varkappa_2}, \ldots$, d. i. der Häufigkeitskoeffizienten eines gegebenen Elementes a in den einzelnen „Näherungsmengen“ $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots$, einen Grenzwert besitzt, der gleich dem Häufigkeitskoeffizienten desselben Elementes a in der Menge $\mathfrak{M}$ ist. Ist eine Menge $\mathfrak{M}$ als Grenzwert solcher Mengen $\mathfrak{M}_i$ definiert, so sehen wir demnach als notwendig und hinreichend für die Existenz der Menge $\mathfrak{M}$ die Bedingung an, dass die Folge der Häufigkeitskoeffizienten $\overset{(a)}{\varkappa_i}$ für jedes bestimmt angebbare Element a einen ganz bestimmten endlichen Grenzwert besitzt. Nach diesem

Kriterium kann die Existenz von $\mathfrak{M}$ auch dann noch beurteilt werden, wenn $\mathfrak{M}$ als $\lim_{i=\infty} (\mathfrak{M}_1 \omega \mathfrak{M}_2 \omega \ldots \omega \mathfrak{M}_i)$ definiert ist; man löst einfach den Ausdruck $\mathfrak{M}_1 \omega \ldots \omega \mathfrak{M}_i$ in seine Elemente auf und wendet dann das Kriterium an.

Wichtiger erscheint folgende Auffassung: Ist eine Menge $\mathfrak{M}$ gegeben, und fasst man alle Elemente $\leqq x$, wo x eine gegebene endliche Zahl ist, in einer Menge $\mathfrak{P}_x$, alle Elemente $> x$ in einer Menge $\mathfrak{Q}_x'$ zusammen, wo x' das auf x folgende nächstgrössere Element der Menge $\mathfrak{M}$ ist, so ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_x \omega \mathfrak{Q}_x'$. Denn die Mengen $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{Q}_x'$ existieren für sich, da die einzige Bedingung hiefür, nämlich das Vorhandensein eines endlichen Häufigkeitskoeffizienten für jedes bestimmt angebbare Elemente mit der Existenz von $\mathfrak{M}$ erfüllt ist. Lässt man jetzt x immerfort wachsen, so wird schliesslich $\mathfrak{M} = \lim_{x=\infty} \mathfrak{P}_x$, da die Elemente von $\mathfrak{Q}_x'$ (falls dieses nicht von einem gewissen x ab $\equiv \asymp$ ist) mit x über alle Schranken wachsen, also nach dem Wortlaut der Definition der Konvergenz einer Menge für die Existenz und Bedeutung der Menge $\mathfrak{M}$ gar nicht in Betracht kommen. Auch wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_x \omega \mathfrak{Q}_x'$[1]) ist, wo $\mathfrak{Q}_x'$ nicht alle Elemente von $\mathfrak{M} > x$ enthält, sondern nur der Bedingung unterworfen ist, kein Element $\leqq x$ zu enthalten, gilt die Gleichung $\mathfrak{M} = \lim_{x=\infty} \mathfrak{P}_x$; diese Darstellung wird für unser spezielles Problem wichtig werden.

---

[1]) Diese Gleichung $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}_x \omega \mathfrak{Q}_x'$ kann auch für die Praxis von Wichtigkeit werden. Es kann nämlich die Zerlegung von $\mathfrak{M}$ in die Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ oft derart vorgenommen werden, dass $\mathfrak{P}$ ein analytisch sehr einfach gebauter Ausdruck ist. Sollen jetzt z. B. die Elemente einer Menge $\mathfrak{M}$, die $\leqq 1000$ sind, abgezählt werden, so ist es oft vorteilhafter, diese Abzählung an dem einfach gebauten $\mathfrak{P}_{1000}$ als an $\mathfrak{M}$ selbst vorzunehmen. Daraus ist ersichtlich, dass wir im Falle, dass $\mathfrak{M}$ ein kleinstes oder grösstes Element enthält, überall ohne den Begriff unendlicher Mengen $\mathfrak{M}$ auskommen könnten, da wir alle Untersuchungen auf die Untersuchung von Mengen $\mathfrak{P}_x$ mit endlicher Elementenzahl (wenn $\mathfrak{P}_x$ nur Elemente $\leqq x$ enthält) zurückführen können. Doch bietet die Verwendung unendlicher Mengen grosse Vorteile.

Wir haben jetzt Summe und Produkt auch für unendliche Mengen zu definieren. Wir wollen darunter diejenige Menge verstehen, die entsteht, wenn man die Addition bezw. Multiplikation der betreffenden Mengen nach der für endliche Mengen gegebenen Regel ausführt, vorausgesetzt, dass diese Menge überhaupt existiert und zwar unabhängig von der Anordnung ihrer einzelnen Elemente vor Zusammenfassung aller gleich grossen Elemente existiert. Sind die beiden Mengen $(a_1 | \underline{\alpha_1}, a_2 \underline{\alpha_2}, \ldots)$ und $(a'_1 | \underline{\alpha'_1}, a'_2 | \underline{\alpha'_2}, \ldots)$, so kann ja ein und dasselbe Element a auf verschiedene Weisen als Summe (Produkt) zweier Elemente a_i und a'_j entstehen. Der Häufigkeitskoeffizient von a wird demnach $\varkappa^{(a)} = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha'_j$, wo immer $a_i + a'_j = a$ (bezw. $a_i \cdot a'_j = a$). Die unbedingte Konvergenz der Summe für $\varkappa^{(a)}$ ist dann die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Menge $(\ldots a | \underline{\varkappa^{(a)}}, \ldots)$, die wir nach dem obigen als Summe (Produkt) der beiden gegebenen Mengen ansehen wollen.

Haben wir jetzt zwei Mengen, die beide ein kleinstes oder beide ein grösstes Element besitzen, so existiert ihre Summe immer; ihr Produkt ebenfalls, wenn keine der beiden Mengen die 0 enthält, welcher Fall jedesmal eine besondere Untersuchung erheischt.[1]) . . . . . (9

Seien die beiden Mengen wieder

$(a_1 | \underline{\alpha_1}, a_2 | \underline{\alpha_2}, \ldots)$ und $(a'_1 | \underline{\alpha'_1}, a'_2 | \underline{\alpha'_2}, \ldots)$.

Wir wollen annehmen, dass a_1 und a'_1 die kleinsten Elemente der betreffenden Mengen sind. Dann können wir annehmen, dass die übrigen Elemente nach ihrer Grösse geordnet sind, so dass also $a_1 < a_2 < \ldots$ und $a'_1 < a'_2 < \ldots$. Wir betrachten jetzt irgend ein Element $a = a_i + a'_j$. Soll nun gleichzeitig $a = a_{i+1} + a'_\varkappa$ sein, so muss $\varkappa \leq j - 1$ sein, da $a_{i+1} + a'_{j+k} > a_i + a'_j$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ und somit $> a$ ist. Soll ferner $a = a_{i+2} + a'_\lambda$ sein, so kann λ nach dem nämlichen Schluss höchstens den Wert $j - 2$ haben. Wir bekommen also im extremsten

[1]) Die 0 darf auch nicht Grenzwert der Elemente der Menge sein.

Fall: $a = a_1 + a'_{j+i-1}, \ldots = a_{i-1} + a'_{j+1} = a_i + a'_j = a_{i+1} + a'_{j-1}, \ldots = a_{i+j-1} + a'_1$,[1]) also immer nur eine endliche Zahl von Kombinationen. Der Häufigkeitskoeffizient von a ist also sicherlich eine ganz bestimmte endliche Zahl, womit die Existenz der Mengensumme erwiesen ist. In derselben Weise wird der entsprechende Nachweis für die Multiplikation geführt. Der extreme Fall tritt nur ein, wenn $a_{i+1} = a_1 + id$ und $a'_{i+1} = a'_1 + id$ bezw. $a_{i+1} = q^i \cdot a_1$ und $a'_{i+1} = q^i \cdot a'_1$ ist.

In analoger Weise wird der Satz bewiesen, dass Summe und Produkt einer beliebigen unendlichen und einer endlichen Menge immer existieren; im Falle des Produkts ist für das Element 0 eine besondere Untersuchung nur dann anzustellen, wenn die Null der endlichen Menge angehört.

Mit diesen Sätzen können wir auch der Frage nach negativen und gebrochenen Mengen näher treten. Zwar sind wir im folgenden nicht gezwungen, von einer derartigen Erweiterung des Mengenbegriffs Gebrauch zu machen, indes erweist sich ihre Einführung oft als nützlich, ausserdem erhält unsere Mengenrechnung dadurch einen gewissen Abschluss. Unter den verschiedenen Möglichkeiten zu definieren, erschien mir am besten die folgende:

$$(-\mathfrak{M}) + \mathfrak{M} \equiv 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10$$

und entsprechend für die Multiplikation $\left(\frac{1}{\mathfrak{M}}\right) \cdot \mathfrak{M} \equiv 1$,

d. h. wir definieren $-\mathfrak{M}$ und $\frac{1}{\mathfrak{M}}$ durch die Gleichungen $\mathfrak{X} + \mathfrak{M} \equiv 0$ bezw. $\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{M} \equiv 1$, wenn derartige Mengen $\mathfrak{X}$ überhaupt existieren.

Wir wollen hier nur den Fall untersuchen, dass $\mathfrak{M}$ ein besimmt angebbares kleinstes Element besitzt. Dann können wir die Elemente von $\mathfrak{M}$ ihrer Grösse nach anordnen, so dass also

[1]) Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, dass zu jedem Element a_i ein ganz bestimmtes nächst grösseres a_{i+1} gehört und ebenso ein entsprechendes a_{i-1}.

$\mathfrak{M} = a_1 \underline{|} \alpha_1, a_2 \underline{|} \alpha_2, \ldots$ und $a_1 < a_2 < \ldots$. Wir nehmen jetzt an, dass ein $\mathfrak{X}$ existiere mit einem kleinsten Element x_1, dann darf nach dem vorigen die Addition ausgeführt werden. Sei $\mathfrak{X} = x_1 \underline{|} \xi_1, x_2 \underline{|} \xi_2, \ldots$, und $x_1 < x_2 < \ldots$, wo wir die x_i und ξ^i so zu bestimmen suchen, dass

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{X} = a_1 + x_1 \underline{|} \alpha_1 \xi_1, a_2 + x_1 \underline{|} \alpha_2 \xi_1, \ldots \equiv 0$$
$$a_1 + x_2 \underline{|} \alpha_1 \xi_2, a_2 + x_2 \underline{|} \alpha_2 \xi_2, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Menge besitzt aber offenbar wieder ein kleinstes Element, nämlich $a_1 + x_1$. Es muss demnach $a_1 + x_1 = 0$; $\alpha_1 \xi_1 = 1$, also $x_1 = -a_1$; $\xi_1 = \frac{1}{\alpha_1}$. Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so wird:

$$0 \underline{|} 1, a_2 - a_1 \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, a_3 - a_1 \right| \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots\ldots\ldots \equiv 0;$$
$$a_1 + x_2 \underline{|} \alpha_1 \xi_2, a_2 + x_2 \underline{|} \alpha_2 \xi_2, a_3 + x_2 \underline{|} \alpha_3 \xi_2, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Das kleinste unter den bekannten Elementen ist $a_2 - a_1$, das kleinste unter den Unbekannten $a_1 + x_2$; es muss sonach $(a_2 - a_1) \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right. \omega (a_1 + x_2) \underline{|} \alpha_1 \xi_2 = \gtrless$, also $a_2 - a_1 = a_1 + x_2$ und $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\alpha_1 \xi_2$. Daraus erhält man $x_2 = a_2 - 2 a_1$ und $\xi_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$. Setzt man diese Werte wieder ein, so erhält man analog zwei Gleichungen für x_3 und ξ_3 u. s. w. Die x_i sind wirklich alle voneinander verschieden, denn diese Eigenschaft wurde ja eigens vorausgesetzt und zur Bestimmung der x_i selbst verwendet. Ferner sieht man leicht, dass die ξ_i sämtlich endliche Werte haben. Betrachten wir jetzt die Menge $\mathfrak{X} = x_1 \underline{|} \xi_1, x_2 \underline{|} \xi_2, \ldots$ so wissen wir also, dass diese Menge existiert, wir wissen ferner, dass $\mathfrak{X}$ zu $\mathfrak{M}$ addiert identisch den Wert Null ergibt; wir sehen also a posteriori, dass unter den angegebenen

Umständen die Gleichung $\mathfrak{X} + \mathfrak{M} = 0$ sicher wenigstens eine Lösung hat. Für die Multiplikation wird der Nachweis genau ebenso geführt, wobei vorausgesetzt ist, dass $\mathfrak{M}$ nicht das Element 0 enthält. Man sieht endlich leicht, dass die Bestimmung von $\mathfrak{X}$ ganz analog der Division zweier Polynome in der gewöhnlichen Algebra ist.

Zur Vervollständigung des eben Entwickelten sei noch auf einen wichtigen Punkt hingewiesen. Nehmen wir an, dass $\mathfrak{M}$ aus einer endlichen (von 1 verschiedenen) Zahl von Elementen bestehe; dann wird sich $\mathfrak{X}$ immer in Form einer unendlichen Menge ergeben. Man sieht also, dass $\mathfrak{X} = (-\mathfrak{M})$ und $(-1)\cdot\mathfrak{M} = (-a_1\,|\,\alpha_1,\ -a_2\,|\,\alpha_2, \ldots)$ [1]) ganz verschiedene Dinge sind. Demgemäss stellen z. B. auch $(-\mathfrak{M}_1)\cdot\mathfrak{M}_2$ und $-(\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}_2)$ zwei verschiedene Mengen dar.

Diese auf Grund unserer Definitionen erreichte Unterscheidung zwischen $-\mathfrak{M}$ und $(-1)\cdot\mathfrak{M}$ erhöht die Ausdrucksfähigkeit der Mengenrechnung gegenüber der gewöhnlichen Algebra ganz ungemein; im gleichen Grade muss jedoch die Möglichkeit, Umformungen durchzuführen, herabgemindert werden.

Natürlich haben wir $-(-\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$, wie aus der Definition von $-\mathfrak{M}$ hervorgeht.[2])

Desgleichen ist $-[(-1)\cdot\mathfrak{M}] = (-1)\cdot[-\mathfrak{M}]$;

Ferner $-(a\,|\,\alpha) = (-a)\left|\frac{1}{\alpha}\right.$, wie durch beiderseitige Addition von $a\,|\,\alpha$ zu erweisen ist. Analog haben wir $\frac{1}{(a\,|\,\alpha)} = \binom{1}{a}\left|\frac{1}{\alpha}\right.$; durch Kombination der beiden letzten Formeln ergibt sich schliesslich:

---

[1]) Wir haben ja die Multiplikation in eine Menge nicht auf positive Zahlen beschränkt.

[2]) $-(-\mathfrak{M}) + (-\mathfrak{M}) \equiv 0$. Addiert man auf beiden Seiten die Menge $\mathfrak{M}$ (was sicher geschehen kann, wenn $-\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ beide ein kleinstes [grösstes] Element besitzen), so wird $-(-\mathfrak{M}) + (-\mathfrak{M}) + \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, aber $(-\mathfrak{M}) + \mathfrak{M} \equiv 0$, woraus der im Text angeführte Satz folgt.

$$\frac{1}{[-(a\,|\,\alpha)]} = \left(-\frac{1}{a}\right)\Big|\,\alpha = -\left[\frac{1}{(a\,|\,\alpha)}\right],$$

wie immer vorausgesetzt, dass a eine Zahl im Sinne der Arithmetik ist.

Wir wollen jetzt an einer anderen Gleichung eine von der vorigen etwas verschiedene Methode der Auflösung zeigen. Die Gleichung sei $X = (X + 1)\,\omega\,1$. Wir nehmen an, dass es ein X gebe, das diese Gleichung befriedigt. Enthält nun X irgend ein Element a, so muss es auch das Element $a + 1$ enthalten, also auch $a + 2$ u. s. w. Diese Folge kann nur dann einmal ein Ende nehmen, wenn sich $a + n + 1$ und $\omega\,1$ gegenseitig aufheben, d. h. wenn $a + n + 1 = \omega\,1$; die Folge bricht dann mit dem Glied $a + n = \omega\,1 - 1 = \omega 0$ ab. Dieser Fall kann somit nur eintreten, wenn $a = \omega 0 - n = \omega\,(-n)$ ist, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet. Umgekehrt erhält man durch beiderseitige Subtraktion von 1 aus der ursprünglichen die neue Gleichung $X = (X - 1)\,\omega\,0$. Daraus wird ersichtlich, dass X neben einem Element a auch die Elemente $a - 1$, $a - 2$ u. s. w. enthalten muss, und die Menge kann nur dann mit dem Element $a - n$ abbrechen, wenn $(a - n - 1)\,\omega\,0 = \succ\!\prec$ ist; d. h. $a = n + 1$, wo n eine ganze positive Zahl, und $a - n = 1$. Wir erhalten also die beiden Lösungen

$$X_1 = \omega 0,\ \omega - 1,\ \omega - 2,\ \omega - 3, \ldots$$
$$X_2 = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots$$

Betrachten wir jetzt den Fall, dass die Menge nirgends abbricht, so wird sie sich nach zwei Seiten ins Unendliche ausdehnen. Indes ist diese Menge $L = (\ldots, a - 1, a, a + 1, \ldots)$ selbst keine Lösung, wie sich durch Einsetzen von L in die gegebene Gleichung leicht ergibt; hingegen ist immer $X\,\omega\,L\,|\,\alpha$ eine Lösung, wenn X eine solche ist.

Wir sehen also, dass eine lineare Gleichung wie $X = (X + 1)\,\omega\,1$ unbegrenzt viele Auflösungen zulässt. Es müssen daher, soll die Aufgabe eine bestimmte Lösung besitzen, noch weitere Bedingungsgleichungen hinzukommen. In der Praxis lassen

sich solche meist aus der Natur des zu behandelnden Problems entnehmen; häufig kann man z. B. nur eine Lösung brauchen, die ausschliesslich positive Zahlen enthält.

Unsere Mengenrechnung ist jetzt bis zu einem gewissen Grad abgeschlossen; um an unser spezielles Problem zu gehen, haben wir nur noch einen letzten Schritt zu tun: die Operation der Abzählung zu untersuchen.

Unter der zu einer Menge $\mathfrak{M}$ gehörigen abzählenden- oder Anzahlfunktion $A_x(\mathfrak{M})$ verstehen wir die Summe der Häufigkeitskoeffizienten aller in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Zahlen $\geqq x$, wenn $\mathfrak{M}$ ein grösstes und $\leqq x$, wenn $\mathfrak{M}$ ein kleinstes Element besitzt.

Nach dieser Definition ist ohne weiteres klar, dass:

$$A_x(\mathfrak{M}_1 \,\omega\, \mathfrak{M}_2) = A_x(\mathfrak{M}_1) + A_x(\mathfrak{M}_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11$$

und: $A_x(a|\underline{\alpha}) = \alpha\, A_x(a)$.

Man kann diesen Satz auch so ausdrücken: die Operation des Abzählens verwandelt die Zeichen ω und ω in $+$ und $-$.

Haben wir jetzt eine Funktion F(x) von der Beschaffenheit, dass, sobald $F(x) < F(y)$ immer auch $x < y$, wo jedem F(x) eindeutig ein x entsprechen soll, so kommt in der nach Grösse der einzelnen Terme geordneten Folge $F(a_1), F(a_2) \ldots F(a_i), x, F(a_{i+1}), \ldots$ x an ebensovielter Stelle als $\mathfrak{F}(x)$ in der Folge $a_1, a_2, \ldots a_i, \mathfrak{F}(x), a_{i+1}, \ldots$, wo $\mathfrak{F}$ die zu F inverse Funktion ist. Daraus ergibt sich unter den gegebenen Voraussetzungen:

$$A_x[(Fa_1)|\underline{\alpha_1}, (Fa_2)|\underline{\alpha_2}, \ldots] = A_{\mathfrak{F}x}[a_1|\underline{\alpha_1}, a_2|\underline{\alpha_2}, \ldots] \quad . \quad (12$$

Ist insbesondere $a_1|\underline{\alpha_1}, a_2|\underline{\alpha_2}, \ldots$ die natürliche Zahlenmenge 1, 2, 3, . . ., so wird

$A_x[F(1), F(2), \ldots] = A_{\mathfrak{F}x}(1, 2, \ldots) = E(\mathfrak{F}x)$, wo E(x) für positive x die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet, für negative x (gemäss seiner eben gegebenen Definition als Anzahlfunktion der Menge 1, 2, 3, . . .) gleich 0 ist.

Wir können jetzt ohne Mühe die Anzahlfunktion für die Summe oder das Produkt zweier Mengen entwickeln:

$$A_x[\mathfrak{M}+(a_1|\underline{\alpha_1}, a_2|\underline{\alpha_2}, \ldots)] = A_x[(\mathfrak{M}+a_1)\underline{\alpha_1}, (\mathfrak{M}+a_2)\underline{\alpha_2}, \ldots] \ldots (12a$$

$$= \alpha_1 \underset{x-a_1}{A} (\mathfrak{M}) + \alpha_2 \underset{x-a_2}{A} (\mathfrak{M}) + \ldots$$

$$A_x[\mathfrak{M} \cdot (a_1|\underline{\alpha_1}, a_2|\underline{\alpha_2}, \ldots)] = \alpha_1 \underset{\underline{a_1}}{A_x} (\mathfrak{M}) + \alpha_2 \underset{\underline{a_2}}{A_x} (\mathfrak{M}) + \ldots$$

Mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen könnte man leicht eine Unmenge von zahlentheoretischen Identitäten herleiten, indem man die Anzahlfunktion irgend einer Summe oder eines Produkts zweier zahlentheoretisch wichtigen Mengen auf zwei verschiedene Weisen bildet.

Wir sind im vorigen von Mengen zu zahlentheoretischen Funktionen übergegangen; umgekehrt kann aus einer Gleichung zwischen Anzahlfunktionen immer auf entsprechende Mengengleichungen geschlossen werden; die Bestimmung der zu einer gegebenen abzählenden Funktion gehörigen Menge geschieht folgendermassen: man sucht die Sprungstellen der gegebenen Anzahlfunktion, diese geben die Elemente der gesuchten Menge; die Werte, um welche die Funktion an diesen Stellen springt, sind die zugehörigen Häufigkeitskoeffizienten. So ist $E(x) \cdot E(2x)$ die Anzahlfunktion von $1|\underline{2}, \frac{3}{2}|\underline{1}, 2|\underline{5}, \frac{5}{2}|\underline{2}, 3|\underline{8}, \frac{7}{2}|\underline{3}, 4|\underline{11}, \frac{9}{2}|\underline{4}, \ldots$

$= 1|\underline{2}, 2\,5, 3|\underline{8}, 4\,11, \ldots \omega \frac{3}{2}|\underline{1}, \frac{5}{2}\,\underline{2}, \frac{7}{2}|\underline{3}, \frac{9}{2}|\underline{4}, \ldots$, denn es ist

z. B. $A_{(\frac{7}{2})} = E\binom{7}{2} \cdot E7 = 3 \cdot 7 = 2+1+5+2+8+3;$

Mengenbegriff und abzählende Funktion vermögen sich gegenseitig zu ersetzen; doch sind die Gleichungen in Mengensymbolen ausgedrückt oft viel einfacher und übersichtlicher als die in Anzahlfunktionen geschriebenen. Nach meiner Ansicht ist die Darstellung eines zahlentheoretischen Satzes vom Charakter unseres speziellen Problems (Restuntersuchungen u. s. w. gehören natürlich einer ganz anderen Gattung von Problemen an)

in Mengensymbolen seine naturgemässe Form, die Darstellung mittels zahlentheoretischer Funktionen hingegen nur ein Notbehelf, der nötig wird, sobald man die Zeichensprache der gewöhnlichen Algebra nicht überschreiten will. Gleichungen mit Mengensymbolen geschrieben, lassen uns immer die Bildung, das Zustandekommen der Mengenelemente erkennen; Gleichungen in zahlentheoretischen Funktionen sind häufig nur Kuriosa, und ihre Richtigkeit kann oft nur mühevoll bewiesen werden, weil der Einblick in ihr Entstehen mangelt.

Die Probleme der analytischen Zahlentheorie einer den Methoden der gewöhnlichen Algebra analogen Behandlungsweise zugänglich zu machen, und so einen tieferen Einblick in die eigentümlichen Schwierigkeiten dieser Probleme zu ermöglichen, war die Veranlassung zur Konstruktion der im vorigen entwickelten Mengenrechnung.

Wir können jetzt, über unsere ursprüngliche Absicht, unbekannte Mengen durch bekannte auszudrücken, hinausgehend, sogar die weitere Aufgabe behandeln, die Eigenschaften irgend welcher Zahlenmengen aus einigen wenigen Definitionsgleichungen zu entwickeln. Die Mengenrechnung gestattet uns nämlich, zwar nicht neue Zahlen zu definieren, aber doch aus dem als bekannt vorausgesetzten, der gewöhnlichen Arithmetik entliehenen Zahlensysteme ganze Gruppen von Zahlen herauszuheben; bestimmen nun die Gleichungen, durch die das geschieht, eine Zahlenmenge vollständig und eindeutig, so müssen auch alle Eigenschaften der betreffenden Menge durch blosse Umformungen aus den sie erzeugenden Gleichungen abzuleiten sein.

So dient als Definition der natürlichen Zahlenreihe die Gleichung $X = (X + 1)\,\omega\,1$ . . . . . (13^0
zusammen mit der Bedingung, dass X nur positive Zahlen enthalte. Nach dem früheren haben wir dann eine und nur eine Lösung,

nämlich $X = 1, 2, 3, \ldots = m$, wie wir die natürliche Zahlenmenge im folgenden immer bezeichnen wollen. Der auf Umordnung von m beruhende Satz, dass alle positiven ganzen Zahlen von der Form $2k$ oder $2k-1$ sind, lässt sich durch blosse Umformung der Gleichung $m = (m+1) \omega 1$ folgendermassen beweisen. Es ist

$$m \omega (m+1) = m + (0, \omega 1) = 1, \text{ also} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\begin{aligned} m = 1 - (0, \omega 1) &= [1 + (0 \omega 1)] - [(0 \omega 1) + (0 \omega 1)] \\ &= (1 \omega 2) - (0 \omega 2) \\ &= [1 - (0 \omega 2)] \omega [2 - (0 \omega 2)] \\ &= (2m - 1) \omega 2m; \end{aligned}$$

Wir wollen uns indes nicht mit Nebensächlichem aufhalten, sondern gleich einen ersten Zusammenhang der Primzahlen mit den natürlichen Zahlen besprechen. Ich meine das sog. Sieb des Eratosthenes, diese altberühmte Methode, die Primzahlen aus der natürlichen Zahlenmenge auszusondern. Wir haben bereits gezeigt, dass $m = 2m \omega m_2$ ist, wo $m_2 = 2m - 1$ aus lauter positiven ganzen Zahlen besteht. 2 heisst die erste Primzahl. Dann soll $\underline{m_2 \omega 1}$, wo $\underline{\mathfrak{M}}$ das kleinste Element der Menge $\mathfrak{M}$ bedeuten soll, wenn ein solches existiert, die nächste Primzahl p_2 heissen. m_2 war gleich $m \omega 2m = m \omega p_1 m$. Bildet man jetzt analog $m_3 = m_2 \omega p_2 m_2$, so soll $\underline{m_3 \omega 1}$ die nächste Primzahl p_3 heissen. Allgemein sei:

$$p_i = \underline{m_i \omega 1}, \text{ wo } m_i = m_{i-1} \omega p_{i-1} m_{i-1};$$

Man überzeugt sich leicht, dass die m_{i+1} wirklich aus lauter positiven ganzen Zahlen bestehende Mengen sind, deren kleinstes Element 1 ist. Die verlangte Eigenschaft sei für irgend ein m_i erfüllt. Dann ist also 1 das kleinste Element von m_i, p_i ist das nächst grössere, weil ja $p_i = \underline{m_i \omega 1}$ nach Definition. Die übrigen Elemente von m_i sind sämtlich grösser als p_i und können nach ihrer Grösse geordnet gedacht werden. Es ist also $m_i = 1 \omega p_i \omega a \omega b \omega \ldots$, wo $a < b < \ldots$. Unter

diesen Voraussetzungen, die offenbar für m und m_2 erfüllt sind, ist

$$m_{i+1} = m_i \omega p_i m_i = 1 \omega p_i \omega a \omega b \omega \ldots \ldots$$
$$\omega p_i \omega p_i^2 \omega a p_i \omega \ldots$$

Die Elemente dieser Menge sind aber mit Ausnahme des Elementes 1 sämtlich ganze positive Zahlen und $> p_i$, wodurch die Behauptung in allen ihren Teilen bestätigt ist. Insbesondere ist $p_{i+1} > p_i$;

Wir hatten $m_{i+1} = m_i (1 \omega p_i)$

$$= m_{i-1} (1 \omega p_{i-1}) (1 \omega p_i)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$= m (1 \omega p_1) (1 \omega p_2) \ldots (1 \omega p_i)$$

Es wird daher $m = \dfrac{m_{i+1}}{(1 \omega p_1)(1 \omega p_2) \ldots (1 \omega p_i)}$ . . (10)

$$= \frac{1}{(1 \omega p_1)(1 \omega p_2) \ldots (1 \omega p_i)}$$
$$\omega \frac{p_{i+1}}{(1 \omega p_1)(1 \omega p_2) \ldots (1 \omega p_i)} \omega \ldots$$

Nun haben wir oben gezeigt, dass die p_i beständig zunehmen. Da sie aber lauter ganze Zahlen sind, so wachsen sie ohne Grenze. Die Ausdrücke in den Nennern konvergieren offenbar noch für $i = \infty$ (vgl. S. 16 ff.) Gehen wir daher zur Grenze über, so bleibt nur stehen: $m = \dfrac{1}{(1 \omega p_1)(1 \omega p_2) \ldots}$ . . . (13

Der Quotient $\dfrac{1}{1 \omega a}$ hat ebenso wie $-(1 \omega a)$ (vgl. S. 22) unbegrenzt viele Bedeutungen. Durch die Forderung aber, dass m nur positive ganze Zahlen enthalten soll, kommen wir dazu, die eine Lösung $\dfrac{1}{1 \omega a} = 1 \omega a \omega a^2 \omega \ldots$ allein in Betracht zu ziehen.

Wir erhalten demnach:

$$m = (1, p_1, p_1^2, \ldots) (1, p_2, p_2^2, \ldots) \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13a$$
$$= 1, \quad p_1, \; p_2, \ldots$$
$$p_1 \, p_2, \ldots . \; p_1^2, \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

Aus dieser letzten Darstellung wird aber ersichtlich, dass unsere Primzahlen, die ja durch die Gleichungen $p_i = m_i \,\omega\, 1$, $m_i = m_{i-1} \,\omega\, p_{i-1}\, m_{i-1}$ definiert sind, vollkommen identisch sind mit den Primzahlen, wie sie gewöhnlich definiert werden, nämlich als Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Letztere befinden sich nämlich sicher unter den Zahlen $p_1, p_2, \ldots$, da ja die übrigen Elemente von m alle von der Form $p_\alpha p_\beta$, p_α^2, $p_\alpha p_\beta p_\gamma, \ldots$ u. s. w. sind, also sicherlich mehr als 2 Teiler haben. Umgekehrt kann aber die Menge $p_1, p_2, \ldots$ nur Primzahlen im gewöhnlichen Sinn und keine anderen Zahlen enthalten; denn betrachtet man den Ausdruck $\frac{1}{(1 \,\omega\, p'_1)\, 1 \,\omega\, p'_2) \ldots}$, wo die $p'_1, p'_2, \ldots$ die Primzahlen im gewöhnlichen Sinn bedeuten, so ist leicht ersichtlich, dass dieser Ausdruck gleich der natürlichen Zahlenmenge m ist, indem jedes Element von m gerade einmal und nur einmal erzeugt wird. Enthielte nun die Menge $p_1, p_2, \ldots$ ausser den $p'_1, p'_2, \ldots$ noch andere Zahlen $a, b, \ldots$, so würde $m = (1, 2, 3, \ldots)\,(1, a, a^2, \ldots) \ldots$ werden; es würden also beispielshalber die Zahlen a, b, ... zweimal auftreten, während m jedes Element nur einmal enthalten soll. Die Menge $p_1, p_2, \ldots$ ist also mit der Menge der Primzahlen im gewöhnlichen Sinn identisch.

Bezeichnen wir jetzt die Menge $p_1, p_2, \ldots$ mit μ, so lassen sich die Mengen

$$M_1 = p_1, p_2, \ldots$$
$$M_2 = p_1 p_2,\ p_1 p_3,\ p_2 p_3, \ldots\ p_1^2, p_2^2, \ldots$$
$$M_3 = p_1 p_2 p_3, \ldots\ p_1^2 p_2, \ldots\ p_1^3, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

alle durch μ ausdrücken. Es ergeben sich nämlich die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} M_1 \,|\, \underline{1} &= \mu \cdot 1 \\ M_2 \,|\, \underline{2} &= \mu \cdot M_1 \,\omega\, \mu^2 \cdot 1 \\ M_3 \,|\, \underline{3} &= \mu \cdot M_2 \,\omega\, \mu^2 \cdot M_1 \,\omega\, \mu^3 \cdot 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Man wird die Richtigkeit dieser Gleichungen unschwer erkennen, wenn man auf die Definition der M_i achtet und zusieht, durch welche Kombinationen ein Primzahlprodukt von gegebener Form entstehen kann.

Man erhält dann sukzessive die Gleichungen:

$$M_1 = \frac{\mu}{|\underline{1}};$$

$$M_2 = \frac{\mu\mu'\,\omega\,\mu^2}{|\underline{2}};$$

$$M_3 = \frac{\mu\mu'\mu''\,\omega\,\mu^2\mu'\,|\underline{3}\,\omega\,\mu^3\,|\underline{2}}{|\underline{6}};$$

. . . . . .

Es ist aber $m = 1\,\omega\,M_1\,\omega\,M_2\,\omega\,M_3\,\omega\ldots,$ . . . (9) (13b

und diese Darstellung konvergiert; denn das kleinste Element von M_i ist 2^i, durch das Hinzutreten eines neuen M_i werden also die Häufigkeitskoeffizienten der Elemente $< 2^i$ nicht alteriert. Sonach erhalten wir:

$$m = 1\,\omega\,\frac{\mu}{|\underline{1}}\,\omega\,\frac{\mu\mu'\,\omega\,\mu^2}{|\underline{2}}\,\omega\,\frac{\mu\mu'\mu''\,\omega\,\mu^2\mu'\,\omega\,\mu^3}{|\underline{6}}\,\omega\ldots \quad . \quad (14$$

Hier haben wir also m durch die Menge der Primzahlen μ ausgedrückt; wir wollen aber μ durch m ausdrücken. Wir versuchen daher die letzte Gleichung (14) direkt umzukehren, um auf diesem Wege zunächst ein Bild von der Form des gesuchten Ausdrucks zu gewinnen.

Erinnern wir uns der früheren Darstellung einer Menge $\mathfrak{M}$ in der Form $\mathfrak{P}_x\,\omega\,\mathfrak{Q}_x'$ (vgl. S. 17), so können wir schreiben:

$$m = 1\,\omega\,\mathfrak{Q}_2$$

$$m = 1\,\omega\,\frac{\mu}{|\underline{1}}\,\omega\,\mathfrak{Q}_4$$

$$m = 1\,\omega\,\frac{\mu}{|\underline{1}}\,\omega\,\frac{\mu\mu'\,\omega\,\mu^2}{|\underline{2}}\,\omega\,\mathfrak{Q}_8$$

. . . . . .

Die $\mathfrak{Q}_i$ sind hiebei Mengen, die nur Elemente $\geqq i$ besitzen. Wir können diese Gleichungen folgendermassen schreiben:

1) $\mu = m \,\omega\, 1 \,\omega\, \mathfrak{Q}_4$

2) $\mu = m \,\omega\, 1 \,\omega\, \frac{\mu\mu' \,\omega\, \mu^2}{|\underline{2}} \,\omega\, \mathfrak{Q}_8$

3) $\mu = m \,\omega\, 1 \,\omega\, \frac{\mu\mu' \,\omega\, \mu^2}{|\underline{2}} \,\omega\, \frac{\mu\mu'\mu'' \,\omega\, \mu^2\mu' \,|\underline{3} \,\omega\, \mu^3 \,|\underline{2}}{6} \,\omega\, \mathfrak{Q}_{16}$

. . . . . .

Setzt man $\mu = m \,\omega\, 1 \,\omega\, \mathfrak{Q}_4$ — welcher Ausdruck einen ersten Näherungswert von μ liefert, wenn wir $\mathfrak{Q}_4$ ausser Acht lassen — in Gleichung 2) ein, so wird:

$$\mu = m \,\omega\, 1 \,\omega\, \frac{(m \,\omega\, 1)\,(m \,\omega\, 1)' \,\omega\, (m \,\omega\, 1)\,\mathfrak{Q}_4 \,|\underline{2} \,\omega\, \mathfrak{Q}_4\,\mathfrak{Q}'_4}{|\underline{2}}$$
$$\omega\, \frac{(m \,\omega\, 1)^2 \,\omega\, \mathfrak{Q}_4{}^2}{|\underline{2}} \,\omega\, \mathfrak{Q}_8$$

Die rechts auftretenden Mengenprodukte sind nach den darüber entwickelten Sätzen (9) sämtlich konvergent. Nun kann $\mathfrak{Q}_4$ mit keinem kleineren Element als 4 beginnen; $(m \,\omega\, 1) \cdot \mathfrak{Q}_4 = (2, 3, \ldots) \cdot (4, \ldots) = 8, \ldots$ kann also kein Element < 8 enthalten. $\mathfrak{Q}_4 \cdot \mathfrak{Q}'_4$ und $\mathfrak{Q}_4{}^2$ können kein Element < 16 besitzen, $\mathfrak{Q}_8$ keines < 8. Es wird demnach:

$$\mu = (m \,\omega\, 1) \,\omega\, \frac{(m \,\omega\, 1)\,(m \,\omega\, 1)' \,\omega\, (m \,\omega\, 1)^2}{|\underline{2}} \,\omega\, \mathfrak{Q}_8';$$

Setzt man diesen Ausdruck, der uns ohne $\mathfrak{Q}_8'$ eine zweite Näherung des gesuchten Ausdrucks für μ darstellt, in Gleichung 3) ein, so erhält man analog:

$$\mu = \frac{(m \,\omega\, 1)^{[1]}}{|\underline{1}} \,\omega\, \frac{(m \,\omega\, 1)^{[2]}}{|\underline{2}} \,\omega\, \frac{(m \,\omega\, 1)^2}{|\underline{2}} \,\omega\, \frac{(m \,\omega\, 1)^{[3]}}{|\underline{3}} \,\omega\, \frac{(m \,\omega\, 1)^3}{|\underline{3}} \,\omega\, \mathfrak{Q}_{16}'$$

So kann man fortfahren. Allgemein erhält man einen Ausdruck, der nur Produkte von der Form $(m \,\omega\, 1)^\iota \,(m \,\omega\, 1)^\varkappa \ldots$ enthält, also etwa

$$\mu = (m \omega 1) \left| \underline{\varkappa_1} \, \omega \, (m \omega 1)(m \omega 1)' \left| \underline{\varkappa_{1\,1}} \, \omega \, (m \omega 1)^2 \right| \underline{\varkappa_2}$$
$$\omega \, (m \omega 1)(m \omega 1)'(m \omega 1)'' \left| \underline{\varkappa_{1\,1\,1}} \, \omega \, (m \omega 1)^2 (m \omega 1) \right| \underline{\varkappa_{2\,1}}$$
$$\omega \, (m \omega 1)^3 \left| \varkappa_3 \, \omega \, \ldots \, \omega \, \mathfrak{Q}' (2^s) \right.$$
$$= \mu' (s) \, \omega \, \mathfrak{Q}' (2^s)$$

Hiebei enthält $\mu' (s)$ alle Mengenprodukte $(m \omega 1)^\iota (m \omega 1)^\varkappa \ldots$, für welche $\sigma = \iota + \varkappa + \ldots < s$ ist. Betrachten wir jetzt zwei aufeinanderfolgende $\mu' (s)$ und $\mu' (s+1)$, so ist es unmöglich dass die Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_{1\,1}, \varkappa_2, \ldots$ und $\varkappa'_1, \varkappa'_{1\,1}, \varkappa'_2, \ldots$ in den beiden Mengen $\mu' (s)$ und $\mu' (s+1)$ voneinander verschieden sind.

Um diese Behauptung zu erweisen, müssen wir eine etwas eingehendere Untersuchung über das Zustandekommen dieser Koeffizienten anstellen. Wir hatten die Gleichung:

$$m = 1 \, \omega \, M_1 \, \omega \, M_2 \, \omega \ldots \omega \, M_s \, \omega \, \mathfrak{Q} (2^{s+1}); \quad . \quad . \quad . \quad (13b)$$

Da wir nun die M_i als Ausdrücke, die homogen in μ sind, erkannt haben, so ist ersichtlich, dass $\mathfrak{Q} (2^{s+1})$ nur solche Zahlen $p_\alpha^\iota \, p_\beta^\varkappa \ldots$ enthalten kann, für welche $\sigma = \iota + \varkappa + \ldots \geqq s + 1$ ist.

Hat man jetzt einen Ausdruck:

$$\mu = (m \omega 1) \left| \underline{\varkappa_1} \, \omega \ldots \omega \, \mathfrak{Q}' (2^s), \right.$$

und weiss, dass analog $\mathfrak{Q}' (2^s)$ nur Zahlen $p_\alpha^\iota \, p_\beta^\varkappa \ldots$ enthält, für welche $\sigma \geqq s$ ist (was z. B. für $s = 2$ unmittelbar zu ersehen ist), so erhält man durch Substitution dieses Ausdrucks in die Gleichung:

$$\mu = m \, \omega \, 1 \, \omega \, M_2 \, \omega \ldots \omega \, M_s \, \omega \, \mathfrak{Q} (2^{s+1})$$

den Ausdruck $\mu = (m \omega 1) \left| \varkappa'_1 \, \omega \ldots \omega \, \mathfrak{Q}' (2^{s+1}) \right.$, und es ist aus der Art und Weise, wie $\mathfrak{Q}' (2^{s+1})$ gebildet wird, klar, dass $\mathfrak{Q}' (2^{s+1})$ nur Zahlen von der Form $p_\alpha^\iota \, p_\beta^\varkappa \ldots$ enthalten kann, für welche $\iota + \varkappa + \ldots \geqq s + 1$ ist.

Fassen wir jetzt in dem letzterhaltenen Ausdruck für μ die Glieder $(m \omega 1)^\iota (m \omega 1)^\varkappa \ldots$, für welche $\iota + \varkappa + \ldots = s$ ist, zu einem Glied $\mathfrak{Q}$ zusammen, so haben wir die beiden Darstellungen: $\mu = (m \omega 1) \left| \underline{\varkappa_1} \, \omega \ldots \omega \, \mathfrak{Q}' (2^s) \right.$

und $\mu = (m \omega 1) \left| \underline{\varkappa'_1} \, \omega \ldots \omega \, \mathfrak{Q} \, \omega \, \mathfrak{Q}' (2^{s+1}) \right.$

und wissen, dass alle Zahlen $p_\alpha^\iota p_\beta^\varkappa \ldots$ für $\iota + \varkappa + \ldots < s$ aus den angedeuteten Produkten von $(m\,\omega\,1)$ hervorgehen müssen, was auch der Wert von s sein mag; d. h. denkt man sich die Produkte $(m\,\omega\,1)^\iota (m\,\omega\,1)^\varkappa \ldots$ in die Mengen $(p_1, p_2 \ldots)$; $(p_1 p_2, p_1 p_3, \ldots)$; $(p_1^2, \ldots)$ u. s. w. zerlegt, so können die Mengen $(\ldots, p_\alpha^\iota p_\beta^\varkappa \ldots, \ldots)$ für $\sigma < s$ nicht in den Mengen $\mathfrak{Q}'(2^s)$ bzw. $\mathfrak{Q}\,\omega\,\mathfrak{Q}'(2^{s+1})$ enthalten sein.

Diese Mengen $(\ldots p_\alpha^\iota p_\beta^\varkappa \ldots)$, deren Zahl genau gleich der Zahl der Produkte $(m\,\omega\,1)^\iota (m\,\omega\,1)^\varkappa \ldots$ ist, müssen aber alle bis auf $(p_1, p_2, \ldots)$ verschwinden, so dass man für die $\varkappa_1, \ldots$ gerade die nötige Anzahl linearer Gleichungen erhält; genau dasselbe Gleichungssystem müssen aber auch die $\varkappa'_1, \ldots$ befriedigen.

Es ist jetzt denkbar, dass unter diesen Gleichungen verschiedene überflüssige sich befinden, so dass die Wurzeln durch sie nicht vollständig bestimmt werden. Wir können aber nach und nach zeigen, dass $\varkappa_1 = \varkappa'_1$; $\varkappa_{11} = \varkappa'_{11}$; $\varkappa_2 = \varkappa'_2$ sein muss u. s. w.

Betrachtet man nämlich die Primzahlen $p_1, p_2 \ldots$, so ist ersichtlich, dass diese nur in der Menge $m\,\omega\,1$ auftreten können. Für Zahlen, die aus den übrigen Produkten $(m\,\omega\,1)^\iota (m\,\omega\,1)^\varkappa \ldots$ kommen, hat ja σ mindestens den Wert 2. Es muss also $\varkappa_1 = \varkappa'_1 = 1$ sein. Geht man weiter und betrachtet Zahlen von der Form $p_\alpha p_\beta$, wo p_α und p_β verschieden sind, so können solche nur in den Mengen $(m\,\omega\,1)$ und $(m\,\omega\,1)(m\,\omega\,1)'$ auftreten, da $(m\,\omega\,1)^2$ nur Quadratzahlen enthält, für alle übrigen $(m\,\omega\,1)^\iota (m\,\omega\,1)^\varkappa \ldots$ aber $\sigma > 2$ ist. Nun ist der Koeffizient von $(m\,\omega\,1)$ schon bestimmt, man hat also wieder nur eine einzige lineare Gleichung für $\varkappa_{11}$ und die selbe Gleichung für $\varkappa'_{11}$.

So kann man fortfahren. Allgemein hat man sämtliche Produkte $(m\,\omega\,1)^\iota (m\,\omega\,1)^\varkappa \ldots$ für das nämliche $\sigma = \iota + \varkappa + \ldots$ so anzuordnen, dass in zwei aufeinander folgenden Kombinationen $(\iota, \varkappa, \ldots)$ und $(\iota' \varkappa', \ldots)$ mindestens eine der Grössen

$\iota', \varkappa', \ldots$ grösser ist als die grösste der Zahlen $\iota, \varkappa, \ldots$, eine Anordnung, bei der Summanden, die für beide Zerlegungen von σ gleich sind, nicht mit in Betracht gezogen werden dürfen.[1]) Wenn man sich jetzt $m\,\omega\,1$ in der Form $(p_1, p_2, \ldots)\,\omega\,(p_1\,p_2, \ldots)\,\omega \ldots$ angeschrieben denkt, so wird leicht ersichtlich, dass eine Zahl von der Form $p_\alpha^{\iota}\,p_\beta^{\varkappa} \ldots$ in der Mengen $(m\,\omega\,1)^{\iota'}\,(m\,\omega\,1)^{\varkappa'} \ldots$ und in allen folgenden nicht mehr vorkommen kann. Dann ergibt sich aber, vorausgesetzt, dass alle vorhergehenden Häufigkeitskoeffizienten bereits bestimmt sind, eine Gleichung mit der einzigen Unbekannten $\varkappa_{\iota\varkappa \ldots}$;

Wir sehen also, dass in der Gleichung

$$\mu = (m\,\omega\,1)\,|\underline{\varkappa_1}\,\omega\,(m\,\omega\,1)\,(m\,\omega\,1)'\;\underline{\varkappa_{11}}\,\omega \ldots\;\omega\,\Sigma'(2^s)$$

bei wachsendem s die Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_{11} \ldots$ durchaus fest bleiben und können daher schreiben:

$$\mu = (m\,\omega\,1)\,|\underline{\varkappa_1}\,\omega\,(m\,\omega\,1)\,(m\,\omega\,1)'\,|\underline{\varkappa_{11}}\,\omega \ldots,$$

da die Existenz des rechtsstehenden Ausdruckes nach dem früher Entwickelten gesichert ist.

Wir haben bereits oben einige der Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_{11}, \ldots$ durch direkte Umkehrung der Gleichung (14)

$$m = 1\,\omega\,\frac{\mu}{|\underline{1}}\,\omega\,\frac{\mu\mu'\,\omega\,\mu^2}{|\underline{2}}\,\omega \ldots$$

berechnet. Man kann indes, wenn die Darstellbarkeit von μ durch die Produkte $(m\,\omega\,1)^{\iota}\,(m\,\omega\,1)^{\varkappa} \ldots$ gesichert ist, dieselben in ihre Elemente wirklich auflösen und dann die einzelnen Zahlentypen $p_\alpha^{\iota}\,p_\beta^{\varkappa} \ldots$ bis auf den Typus p_α^{1} durch geeignete Wahl der Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_{11}, \ldots$ zum Verschwinden bringen.

---

[1]) So kommt z. B. die Kombination (2, 2, 1, 1) vor (3, 2, 1). Denn nach Streichung der gemeinschaftlichen Elemente 2 und 1 bleibt nur (2, 1) und (3). 3 ist aber grösser als 2. Die sämtlichen Zerlegungen von $\sigma = 6$ sind folgendermassen anzuordnen: (1 1 1 1 1 1); (2 1 1 1 1); (2 2 1 1); (2 2 2); (3 1 1 1); (3 2 1); (3 3); (4 1 1); (4 2); (5 1); (6).

Auf diese Weise habe ich ursprünglich folgende Gleichung abgeleitet:[1])

$$\mu = \frac{(m\,\omega\,1)^{[1]}}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[3]}}{\underline{|3}}\ \omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[4]}}{\underline{|4}}\ \omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[5]}}{\underline{|5}}\ \ldots\ \ldots (15$$
$$\omega\ \frac{(m^2\,\omega\,1)}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{(m^3\,\omega\,1)}{\underline{|3}}\ \omega\ \frac{(m^2\,\omega\,1)^{[2]}}{\underline{|4}}\ \omega\ \frac{(m^5\,\omega\,1)}{\underline{|5}}\ \ldots$$

Auffallend sind in diesem Ausdruck die Glieder der ersten Zeile; ihr einfaches Fortschreitungsgesetz gibt hinreichend Grund, eine Menge M zu untersuchen, wo M definiert ist durch die Gleichung:

$$M = \frac{(m\,\omega\,1)^{[1]}}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[3]}}{\underline{|3}}\ \omega\ \ldots\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (16$$

Der Ausdruck rechts konvergiert. Nehmen wir wieder einen Teil der Menge, M_s, wo

$$M_s = \frac{(m\,\omega\,1)^{[1]}}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega\ \ldots\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[s]}}{\underline{s}},$$

so kann der übrige Teil von M, den wir mit $\mathfrak{Q}_s$ bezeichnen, nur mehr Zahlen grösser als 2^s enthalten und zwar nur mehr Zahlen von der Form $p_\alpha^{\iota}\, p_\beta^{\varkappa}\ldots$, für welche $\sigma = \iota + \varkappa \ldots > s$ ist.

Wir können jetzt mit Hilfe der Formel:

$$\frac{\binom{\nu}{0}}{\nu} + \frac{\binom{\nu+1}{1}}{\nu+1} + \ldots + \frac{\binom{s}{s-\nu}}{s} = \frac{\binom{s}{\nu}}{\nu}$$

die Umformung vornehmen:

$$M_s = \omega\,1\left|\frac{1}{\underline{1}} + \frac{1}{\underline{2}} + \ldots + \frac{1}{\underline{s}}\right.\ \omega\ m^{[1]}\left|\frac{\binom{s}{1}}{\underline{1}}\ \omega\, m^{[2]}\right|\frac{\binom{s}{2}}{\underline{2}}\ \omega\ \ldots\ m^{[s]}\left|\frac{\binom{s}{s}}{\underline{s}}\right.;$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie oft eine Zahl $p_\alpha^{\iota}\, p_\beta^{\varkappa}\ldots$, für welche $\iota + \varkappa \ldots \leqq s$ ist, in M_s vorkommt. Zunächst ist

[1]) Diesen Weg wird man ganz allgemein auch bei Berechnung anderer Zahlenmengen einschlagen: zuerst die Darstellbarkeit in einer bestimmten Form nachweisen und dann die Entwicklungskoeffizienten bestimmen.

klar, dass die Zahl 1 in M_s nicht vorkommen kann, da sich M_s in seiner ursprünglichen Form aus lauter Produkten von $m \infty 1 = 2, 3, \ldots$ zusammensetzt. Um die Untersuchung für $p_\alpha^\iota p_\beta^\varkappa \ldots > 1$ durchzuführen, müssen wir wissen, wie oft diese Zahl in den Mengen $m^{[\nu]}$ auftritt.

Nun ist aber

$$m = \ldots (1, p_\alpha, \ldots . p_\alpha^\iota \left| \underline{\binom{\iota}{\iota}}, \ldots \right) \ldots . \quad . \quad (13a)$$

$$m\,m' = \ldots (1, p_\alpha | 2, \ldots p_\alpha^\iota \left| \underline{\underline{\binom{\iota+1}{\iota}}}, \ldots \right) \ldots$$

$$m\,m'\,m'' = \ldots (1, p_\alpha \underline{3}, \ldots p_\alpha^\iota \left| \underline{\underline{\underline{\binom{\iota+2}{\iota}}}}, \ldots \right) \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m^{[\nu]} = \ldots (1, p_\alpha \left| \underline{\binom{\nu}{1}}, \ldots p_\alpha^\iota \right| \underline{\underline{\binom{\iota+\nu-1}{\iota}}}, \ldots) \ldots$$

demnach kommt die Zahl $p^\alpha_\iota\, p_\beta^\varkappa \ldots$ in der Menge $m^{[\nu]}$ gerade $\binom{\iota+\nu-1}{\iota}\binom{\varkappa+\nu-1}{\varkappa}\ldots$mal vor.[1])

Bezeichnen wir jetzt den Häufigkeitskoeffizienten von $p_\alpha^\iota p_\beta^\varkappa \ldots$ in der Menge M_s mit q, so wird:

$$q = \frac{\binom{s}{1}}{1} \cdot \binom{\iota}{\iota} \cdot \binom{\varkappa}{\varkappa} \ldots - \frac{\binom{s}{2}}{2} \binom{\iota+1}{\iota} \binom{\varkappa+1}{\varkappa} \ldots$$

$$+ \frac{\binom{s}{3}}{3} \binom{\iota+2}{\iota} \binom{\varkappa+2}{\varkappa} \ldots - \ldots$$

$$\iota q = \binom{s}{1} \binom{\iota-1}{\iota} \binom{\varkappa}{\varkappa} \ldots - \binom{s}{2} \binom{\iota+1}{\iota-1} \binom{\varkappa+1}{\varkappa} \ldots$$

$$+ \binom{s}{3} \binom{\iota+2}{\iota-1} \binom{\varkappa+2}{\varkappa} \ldots - \ldots$$

[1]) Bedenkt man, dass eine Zahl k in der Menge $m\,m'$ gerade so oft vorkommt, als sie Teiler hat, so hat man in Obenstehendem einen sehr einfachen Beweis für den Satz, dass die Anzahl der Teiler von $p_\alpha^\iota p_\beta^\varkappa \ldots$ gleich $(\iota+1)(\varkappa+1)\ldots$ ist.

Nun ist leicht einzusehen, dass $\binom{x+a}{p}$ eine ganze rationale Funktion von x vom Grade p ist. Demnach ist das Produkt $\binom{x+a_1}{p_1} \cdot \binom{x+a_2}{p_2} \ldots$ eine ganze rationale Funktion von x vom Grade $p_1 + p_2 + \ldots$. Daraus folgt aber, dass die Grössen

$$\varphi(x) = \binom{x}{\iota - 1} \cdot \binom{x+\varkappa-\iota}{\varkappa} \cdot \binom{x+\lambda-\iota}{\lambda} \ldots$$

für $x = \iota - 1, \iota, \iota + 1, \ldots$ eine arithmetische Reihe von der Ordnung $(\iota - 1) + \varkappa + \lambda + \ldots = \sigma - 1$ bilden. Da aber vorausgesetzt war, dass $\sigma \leq s$, so ist der Ausdruck:

$$\Delta = -\binom{s}{0}\varphi(\iota-1) + \binom{s}{1}\varphi(\iota) - \binom{s}{2}\varphi(\iota+1) - \ldots = 0;$$

Also ist $\iota q = \Delta + \binom{s}{0}\varphi(\iota-1) = \varphi(\iota-1);$

Nun ist aber $\varphi(\iota-1) = \binom{\iota-1}{\iota-1}\binom{\varkappa-1}{\varkappa}\binom{\lambda-1}{\lambda}\ldots$, also gleich 0, wenn nicht alle $\varkappa, \lambda, \ldots$ selbst gleich 0 sind. Im letzteren Fall treten die Faktoren $\binom{\varkappa-1}{\varkappa}, \binom{\lambda-1}{\lambda}$ u.s.w. überhaupt nicht auf und es ist $\varphi(\iota-1) = \binom{\iota-1}{\iota-1} = 1.$

Wir haben demnach $q = 0$, wenn die gegebene Zahl mehrere verschiedene Primfaktoren $p_\alpha, p_\beta, \ldots$ besitzt, und $q = \frac{1}{\iota}$, wenn die vorgelegte Zahl von der Form $p_\alpha{}^\iota$ ist.

Daraus erhält man schliesslich: (8)

$$M = \frac{\mu}{\lfloor 1} \omega \frac{\mu^2}{\lfloor 2} \omega \frac{\mu^3}{\lfloor 3} \omega \ldots, \quad \ldots \quad (17$$

wo μ wieder die Menge der Primzahlen bedeutet.

Durch Umkehrung dieser Formel erhält man:

$$\mu = \frac{M}{\lfloor 1} \omega \frac{M^2}{\lfloor 2} \omega \frac{M^3}{\lfloor 3} \omega \frac{M^5}{\lfloor 5} \omega \frac{M^6}{\lfloor 6} \omega \ldots; \quad \ldots \quad (17a$$

Das Glied M^{ν} hat hier das Vorzeichen ω oder ϖ, je nachdem ν in der Menge $\frac{1}{m} = (1\,\varpi\,2)\,(1\,\varpi\,3)\ldots = 1\,\omega\,2\,\varpi\,3\ldots$ dieses Zeichen hat oder nicht.

Bezeichnet man jetzt die Funktion $A_x(M)$ . . (11; 12) kurzerhand mit $A(x)$, so ist die Anzahl der Primzahlen $\leq x$:

$$A_x(\mu) = \frac{A(x)}{1} - \frac{A(\sqrt{x})}{2} - \frac{A(\sqrt[3]{x})}{3} - \frac{A(\sqrt[5]{x})}{5} + \ldots \quad (18$$

$$A(x) = \frac{A_x(m\,\varpi\,1)^{[1]}}{1} - \frac{A_x(m\,\varpi\,1)^{[2]}}{2} + \frac{A_x(m\,\varpi\,1)^{[3]}}{3} - \ldots, \quad (16)$$

wo $A_x(m\,\varpi\,1)^{[\nu]}$ definiert ist durch die Gleichungen:

$$A_x(m\,\varpi\,1)^{[\nu]} = A_{\frac{x}{2}}(m\,\varpi\,1)^{[\nu-1]} + A_{\frac{x}{3}}(m\,\varpi\,1)^{[\nu-1]} + A_{\frac{x}{4}}(m\,\varpi\,1)^{[\nu-1]} + \ldots; \quad (12a)$$

$$A_x(m\,\varpi\,1)^{[1]} = E(x) - 1;$$

Für $x < 2^{s+1}$ ist auch:

$$A(x) = -\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{s}\right) + \frac{\binom{s}{1}}{1} A_x(m) - \frac{\binom{s}{2}}{2} A_x(m)^{[2]} + \ldots \pm \frac{\binom{s}{s}}{s} A_x(m)^{[s]},$$

wo $A_x(m)^{[\nu]} = A_{\frac{x}{1}}(m)^{[\nu-1]} + A_{\frac{x}{2}}(m)^{[\nu-1]} + A_{\frac{x}{3}}(m)^{[\nu-1]} + \ldots;$ [1])

$$A_x(m) = E(x);$$

[1]) Alle diese Formeln brechen für endliche x von selbst ab.

Beispiel. Sei $A(10)$ zu berechnen:

$$A_{\frac{10}{1}}(m)^{[1]} = 10; \quad A_{\frac{10}{2}}(m) = 5; \quad A_{\frac{10}{3}}(m) = 3; \quad A_{\frac{10}{4}}(m) = A_{\frac{10}{5}}(m) = 2;$$

$$A_{\frac{10}{6}}(m) = \ldots = A_{\frac{10}{10}}(m) = 1; \quad A_{\frac{10}{11}} = 0 \ldots$$

Daraus ergeben sich die Werte:

Dann kann man immer ein N so bestimmen, dass das kleinste Element von $\mathfrak{M}^{[N]}$ grösser als eine gegebene Zahl A ist. Denn man kann immer $(1+\delta)^N$, wo δ eine gegebene positive Zahl ist, $> A$ machen; $(1+\delta)^N$ ist aber das kleinste Element von $\mathfrak{M}^{[N]}$, wenn $1+\delta$ das kleinste Element von $\mathfrak{M}$ ist. Daraus folgt aber, dass der Ausdruck für $\mathrm{Log}(\mathfrak{M}\,\omega\,1)$ existiert. Speziell ist $\mathrm{Log}(\mathfrak{M}\,\omega\,1)$ konvergent, wenn $\mathfrak{M} = m\,\omega\,1 = 2, 3, 4, \ldots$.

Wir nehmen jetzt zwei Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, deren sämtliche Elemente > 1 sind. Dann ist:

$$\mathrm{Log}(\mathfrak{M}_1\,\omega\,1) = \frac{\mathfrak{M}_1^{[1]}}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{\mathfrak{M}_1^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega \ldots \frac{\mathfrak{M}_1^{[N_1-1]}}{\underline{|N_1-1}}\ \omega\ \mathfrak{Q}_1(A)$$

$$\mathrm{Log}(\mathfrak{M}_2\,\omega\,1) = \frac{\mathfrak{M}_2^{[1]}}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{\mathfrak{M}_2^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega \ldots \frac{\mathfrak{M}_2^{[N_2-1]}}{\underline{|N_2-1}}\ \omega\ \mathfrak{Q}_2(A)$$

Bezeichnen wir die grössere der Zahlen N_1 und N_2 mit N, so ist sicher:

$$\mathrm{Log}(\mathfrak{M}_1\,\omega\,1)\,\omega\,\mathrm{Log}(\mathfrak{M}_2\,\omega\,1) = \frac{\mathfrak{M}_1^{[1]}\,\omega\,\mathfrak{M}_2^{[1]}}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{\mathfrak{M}_1^{[2]}\,\omega\,\mathfrak{M}_2^{[2]}}{\underline{2}}\ \omega \ldots$$
$$\frac{\mathfrak{M}_1^{[N-1]}\,\omega\,\mathfrak{M}_2^{[N-1]}}{\underline{|N-1}}\ \omega\ \mathfrak{Q}(A)$$

$$= \frac{(\mathfrak{M}_1\,\omega\,\mathfrak{M}_2)}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{(\mathfrak{M}_1\,\omega\,\mathfrak{M}_2)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{(\mathfrak{M}_1\,\omega\,\mathfrak{M}_2)^{[3]}}{\underline{|3}}\ \omega \ldots\ldots$$
$$\omega\ \frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\,\underline{|2}}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2(\mathfrak{M}_1\,\omega\,\mathfrak{M}_2)\,\underline{|3}}{\underline{|3}}\ \omega \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \omega\ \mathfrak{Q}(A)$$

$$= \frac{(\mathfrak{M}_1\,\omega\,\mathfrak{M}_2\,\omega\,\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^{[1]}}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{(\mathfrak{M}_1\,\omega\,\mathfrak{M}_2\,\omega\,\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega \ldots$$
$$\frac{(\mathfrak{M}_1\,\omega\,\mathfrak{M}_2\,\omega\,\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)^{[n]}}{\underline{|n}}\ \omega\ \mathfrak{Q}'(B)\ \omega\ \mathfrak{Q}(A)$$

$\mathfrak{Q}'(B)$ enthält nur Zahlen gleich oder grösser als $B = (1+\delta)^{n+1}$; die Elemente von $\mathfrak{Q}'(B)$ stammen nämlich aus

denjenigen Gliedern, die nicht mehr in die Klammern $(\mathfrak{M}_1 \omega \mathfrak{M}_2 \omega \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2)^{[\nu]}$ aufgenommen werden konnten. B ist kleiner als A, kann indes bei passender Wahl von N beliebig gross gemacht werden. Lässt man jetzt B ins Unendliche wachsen, so bleibt der rechtsseitige Ausdruck immer konvergent, da $\mathfrak{M}_1 \omega \mathfrak{M}_2 \omega \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$ eine Menge ist, deren sämtliche Elemente > 1 sind.

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(\mathfrak{M}_1 \omega 1) \omega \mathrm{Log}(\mathfrak{M}_2 \omega 1) &= \mathrm{Log}(1 \omega \mathfrak{M}_1 \omega \mathfrak{M}_2 \omega \mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2) \\ &= \mathrm{Log}[(\mathfrak{M}_1 \omega 1)(\mathfrak{M}_2 \omega 1)]; \text{ [1]} \quad . \quad (20 \end{aligned}$$

Setzt man $\mathfrak{M}_2 = \succ\!\!\prec$, so wird

$\mathrm{Log}(\mathfrak{M}_1 \omega 1) \omega \mathrm{Log}(1) = \mathrm{Log}(\mathfrak{M}_1 \omega 1)$,

also $\mathrm{Log}(1) = \succ\!\!\prec$;

da nach (10) $\left(\frac{1}{\mathfrak{M}}\right) \cdot \mathfrak{M} = 1$, so ist $\mathrm{Log}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}}\right) \omega \mathrm{Log}(\mathfrak{M}) = \succ\!\!\prec$;

d. h. $\mathrm{Log}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}}\right) = \mathfrak{o} \mathrm{Log}(\mathfrak{M})$

Man kann $\mathrm{Log}\left(\frac{1}{\mathfrak{M}}\right)$ nach Produkten von $\left(\frac{1}{\mathfrak{M}} \omega 1\right)$ entwickeln, wenn alle Elemente von $\mathfrak{M}$ bis auf eines > 1 sind. Denn in diesem Falle sind wegen der Gleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{M}} = 1 \mathfrak{o} (\mathfrak{M} \mathfrak{o} 1)^{[1]} \omega (\mathfrak{M} \mathfrak{o} 1)^{[2]} \mathfrak{o} (\mathfrak{M} \mathfrak{o} 1)^{[3]} \omega \ldots$$

alle Elemente von $\left(\frac{1}{\mathfrak{M}} \mathfrak{o} 1\right) > 1$.

Speziell ist (16) $\mathrm{M} = \mathrm{Log}\,\mathrm{m} = \mathfrak{o} \mathrm{Log} \frac{1}{\mathrm{m}}$

$$= \mathfrak{o} \left(\frac{1}{\mathrm{m}} \mathfrak{o} 1\right)^{\left[\frac{1}{1}\right]} \omega \left(\frac{1}{\mathrm{m}} \mathfrak{o} 1\right)^{\left[\frac{1}{2}\right]} \mathfrak{o} \ldots$$

Das ist ein neuer Ausdruck für M; wir erhalten jedoch viel allgemeiner (20):

---

[1]) Wir können neben $\mathrm{Log}(\mathfrak{M} \omega 1)$ noch ein $\Lambda o \gamma(\mathfrak{M} \omega 1)$ definieren, wo an Stelle von Mengenprodukten überall Mengensummen treten.

$$M = \operatorname{Log} m = \frac{(\operatorname{Log} m)\,\underline{|\nu}}{\underline{|\nu}} = \frac{\operatorname{Log}(m^{[\nu]})}{\underline{|\nu}} =$$

$$= \left(\frac{(m^{(\nu)} \omega\, 1)^{[1]}}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{(m^{[\nu]}\ \omega\, 1)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega \ldots\right)\frac{\underline{|1}}{\underline{|\nu}};$$

Mit Hilfe der Definition von $\operatorname{Log}\mathfrak{M}$ lässt sich auch die Bedeutung der Menge $M = \operatorname{Log} m$ sehr leicht entwickeln (16). Wir haben nämlich:

$$M = \operatorname{Log} m = \operatorname{Log}\left[\frac{1}{1\ \omega\ p_1} \cdot \frac{1}{1\ \omega\ p_2} \ldots\right] \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

$$= \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1\ \omega\ p_1}\right) \omega\ \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1\ \omega\ p_2}\right) \omega \ldots$$

$$= \omega \operatorname{Log}(1\ \omega\ p_1)\ \omega \operatorname{Log}(1\ \omega\ p_2)\ \omega \ldots$$

$$= \left(\frac{p_1}{\underline{|1}} \omega \frac{{p_1}^2}{\underline{|2}} \omega \ldots\right) \omega \left(\frac{p_2}{\underline{|1}} \omega \frac{{p_2}^2}{\underline{|2}} \omega \ldots\right) \omega \ldots \quad (19)$$

$$= \frac{\mu}{\underline{|1}} \omega \frac{\mu^2}{\underline{|2}} \omega \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Wir können jetzt umgekehrt eine Funktion

$$\mathfrak{E}^{\mathfrak{M}} = 1\ \omega \frac{\mathfrak{M}^{[1]}}{\underline{|1!}}\ \omega \frac{\mathfrak{M}^{[2]}}{\underline{|2!}}\ \omega \ldots$$

aufstellen, für welche das Verknüpfungstheorem

$$\mathfrak{E}^{\mathfrak{M}_1\, \omega\, \mathfrak{M}_2} = \mathfrak{E}^{\mathfrak{M}_1} \cdot \mathfrak{E}^{\mathfrak{M}_2}$$

gilt. $\mathfrak{E}^{\mathfrak{M}}$ konvergiert sicher, wenn die Elemente von $\mathfrak{M} > 1$ sind.[1]) Man sieht auch leicht ein, dass $\mathfrak{E}^{(\operatorname{Log}\mathfrak{M})} = \mathfrak{M}$ und $\operatorname{Log}(\mathfrak{E}^{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{M}$ ist. Die Beweise hiefür anzugeben, erscheint mir wegen ihrer Einfachheit überflüssig.

Man kann auch von der Funktion $\mathfrak{Y} = \operatorname{Log}\mathfrak{X}$ sprechen, wo $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ Mengen sind. Eine stetige Überführung von $\mathfrak{X}$

[1]) Das ist natürlich keine notwendige Bedingung; aber dieser Fall kommt für uns allein in Betracht.

in ein gegebenes $\mathfrak{X}'$ wird durch stetige Veränderung der Häufigkeitskoeffizienten bewirkt. Nimmt $\mathfrak{X}$ den speziellen Wert m an, so ist, wie wir gesehen haben, $\operatorname{Log} m = \frac{\mu}{|\underline{1}} \omega \frac{\mu^2}{|\underline{2}} \omega \ldots = M$.

Umgekehrt ist $m = \mathfrak{E}^M = 1 \omega \frac{M}{|\underline{1!}} \omega \frac{M M'}{|\underline{2!}} \omega \ldots$

Setzt man in diese Gleichung den Ausdruck

$$M = \frac{\mu}{|\underline{1}} \omega \frac{\mu^2}{|\underline{2}} \omega \ldots \text{ ein,}$$

so erhält man m durch μ ausgedrückt, genau in der Form, in der es sich oben schon ergeben hat (14).

Allgemeiner ist: $m^{[\nu]} = \mathfrak{E}^{(M|\underline{\nu})} = 1 \omega \frac{M|\underline{\nu}}{|\underline{1!}} \omega \frac{M M'|\nu^2}{|\underline{2!}} \omega \ldots$

$$A_x(m)^{[\nu]} = 1 + \frac{\nu}{1!} A_x(M) + \frac{\nu^2}{2!} A_x(M M') + \ldots \; (x \geqq 1) \quad . \quad (21$$

Ist $2^s \leqq x < 2^{s+1}$, so bricht die Reihe mit dem Glied $\frac{\nu^s}{s!} A_x(M)^{[s]}$ ab.[1]) Die $A_x(M)^{[\nu]}$ sind hier als bekannt zu be-

[1]) Erinnern wir uns der bereits berechneten Werte von $A_x(m)^{[\nu]}$ (vgl. S. 37):

	x: 10	5	3	2	1
ν: 0	1	1	1	1	1
1	10	5	3	2	1
2	27	10	5	3	1
3	53				

Man kann diese Tabelle leicht fortsetzen, da die Vertikalreihen arithmetische Reihen bekannter Ordnung bilden müssen (vgl. oben).

1 3 5 / 7 9 ... 1 5 10 / 16 23 ...
2 2 / 2 2 ... 4 5 / 6 7 ...
1 / 1 1 ...

1 10 27 53 / 89 136 ...
9 17 26 / 36 47 ...
8 9 / 10 11 ...
1 / 1 1 ...

trachten vermöge der Beziehung $A_x(M)^{[\nu]} = A_{\frac{x}{2}}(M)^{[\nu-1]} +$ $A_{\frac{x}{3}}(M)^{[\nu-1]} + \frac{1}{2} A_{\frac{x}{4}}(M)^{[\nu-1]} + \ldots$; dann dient die Gleichung als Definition der Funktionen $A_x(m)^{[\nu]}$. Umgekehrt kann mit Hilfe dieser Gleichung eine Relation zwischen den Funktionen $A_x(m)^{[\nu]}$ in eine solche zwischen den $A_x(M)^{[\nu]}$ umgeformt werden.

Bildet man jetzt die Produkte $M^{[\nu]}$, so treten genau dieselben Koeffizienten wie in der Reihenentwicklung für $[\lg(1+x)]^\nu$ auf; es wird demnach: . . . . . (22

$$\frac{A_x(M)^{[\nu]}}{\nu!} = \frac{C_0{}^\nu}{\nu!} A_x(m\,\omega\,1)^{[\nu]} - \frac{C_1{}^{\nu+1}}{(\nu+1!)} A_x(m\,\omega\,1)^{[\nu+1]} + \frac{C_2{}^{\nu+2}}{(\nu+2)!} A_x(m\,\omega\,1)^{[\nu+2]} - \ldots$$

Die $C_p{}^\nu$ sind hiebei die sog. Fakultätskoeffizienten. Die letzte Gleichung ist das Gegenstück von (21); sie gestattet, wenn die $A_x(m\,\omega\,1)^{[\nu]}$ bekannt sind, die Berechnung der Primzahlfunktionen $A_x(M)^{[\nu]}$, bezw. die Transformation einer Gleichung in $A_x(M)^{[\nu]}$ in eine solche in $A_x(m\,\omega\,1)^{[\nu]}$.

Wir wollen schliesslich noch kurz die Aufgabe besprechen, die in der Menge $am - b$, wo a und b gegebene Zahlen sind, enthaltenen Primzahlen ausfindig zu machen. b kann hiebei $< a$ vorausgesetzt werden.

Wir denken uns zu diesem Zweck die Primzahlenmenge μ so umgeordnet, dass alle Elemente von der Form $am - k$, wo k eine gegebene Zahl ist, zu einer Teilmenge $\mu(am - k)$ zusammentreten.

Es ist dann:

$$\mu = \mu(am)\ \omega\ \mu(am-1)\ \omega \ldots \omega\ \mu(am-a+1);$$

Betrachtet man jetzt die Primzahlen, welche der Menge $am - b$ angehören, so gehören diese sicher alle der Menge μ an, da ja μ überhaupt alle Primzahlen enthält; man kann aber

weiter sagen, dass sie gerade der Menge $\mu(am - b)$ angehören, da alle Primzahlen von der Form $am - b$ dieser Menge angehören. Andrerseits kann $\mu(am - b)$ keine Zahl enthalten, die nicht auch in der Menge $am - b$ auftreten würde; denn letztere Menge enthält alle positiven ganzen Zahlen vom Charakter $am - b$, also sicher auch alle Primzahlen von diesem Charakter, d. h. eben die Elemente der Menge $\mu(am - b)$. Wir sehen also, dass die der Menge $am - b$ angehörigen Primzahlen mit der Menge $\mu(am - b)$ identisch sind. Zwei Mengen müssen nämlich dann identisch sein, wenn jede in der andern vollständig enthalten ist.

Um nun $\mu(am - b)$ zu bestimmen, setzen wir in die Gleichung (15):

$$\mu = \frac{(m\,\omega\,1)}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega \ldots$$
$$\omega\ \frac{(m\,\omega\,1)^{2}}{\underline{|2}}\ \omega \ldots$$

für $m\,\omega\,1$ überall den gleichwertigen Ausdruck:

$$(am + 1)\ \omega\ am\ \omega\ (am - 1) \ldots .\ \omega\ (am - a + 2)$$

und ordnen die entstehenden Mengenprodukte zu den einzelnen $\mu(am - k)$ zusammen.

Sei z. B. $a = 2$. Dann haben wir zu setzen:

$\mu = \mu(2m)\ \omega\ \mu(2m - 1)$ und $m\,\omega\,1 = (2m)\ \omega\ (2m + 1)$;

Von der Form $2m$ sind dann die Elemente folgender Produkte:

$2m$;

$(2m)^{[2]}$, $(2m)^{2}$, $2m\,(2m + 1)$;

$(2m)^{[3]}$, $(2m)^{3}$, $(2m)^{2} \cdot 2m$, $(2m)^{[2]}\,(2m + 1)$, $(2m)^{2}\,(2m + 1)$,
$2m \cdot (2m + 1)^{[2]}$, $2m \cdot (2m + 1)^{(2)}$;

. . . . . .

Von der Form $2m - 1$ sind die Elemente folgender Produkte:

$(2m + 1)$;

$(2m + 1)^{[2]}$, $(2m + 1)^{(2)}$;

$(2m+1)^{[3]}$, $(2m+1)^{(3)}$, $(2m+1)^{(2)} \cdot (2m+1)$;

. . . . . .

Daraus ergibt sich:

$$\mu(2m) = 2 = 2m\ \omega\ \frac{(2m)^{[2]}\ \omega\ (2m)\,(2m+1)}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{(2m)^2}{\underline{|2}}$$

$$\omega\ \frac{(2m)^{[3]}\,\omega\,(2m)^{[2]}\,(2m+1)}{\underline{|3}}\ \omega\ \frac{(2m)(2m+1)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{(2m)^3}{\underline{|3}}\ \omega\ldots$$

$$\mu(2m-1) = \mu\,\omega\,2 = (2m+1)\,\omega\ \frac{(2m+1)^{[2]}}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{(2m+1)^{[3]}}{\underline{|3}}\ \omega\ldots$$

$$\omega\ \frac{(2m+1)^2}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{(2m+1)^3}{\underline{|3}}\ \omega\ldots$$

$$= \frac{\mathrm{Log}(2m-1)}{\underline{|1}}\ \omega\ \frac{\mathrm{Log}(2m-1)^2}{\underline{|2}}\ \omega\ \frac{\mathrm{Log}(2m-1)^3}{\underline{|3}}\ \omega..^{1})(23$$

Die Konvergenz des rechtsseitigen Ausdrucks ist nach den darüber aufgestellten Sätzen unmittelbar ersichtlich.

Wir wollen noch in kurzem einiges über die Behandlung des Primzahlenproblems in der gewöhnlichen Algebra erwähnen. Nach dem eingangs Gesagten muss bei jeder Behandlung des Problems, die eine exakte Darstellung der Funktion $A_x(\mu)$ anstrebt, indirekt der Mengenbegriff verwertet werden; eine Behandlung mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Algebra ist daher nur dann möglich, wenn diese einen Ersatz für den Mengenbegriff zu bilden imstande ist. Nun gestattet der Funktionsbegriff ähnliches wie die Operation ω, nämlich eine Aneinanderreihung von Objekten zu einem Ganzen von der Art, dass die Einzelobjekte aus dem Ganzen jederzeit wieder rekon-

[1]) Definition der natürl. Zahlenmenge $m = 1\,\omega\,(m+1)$. (13°)
Durch Multiplikation mit 2 folgt $2m = 2\,\omega\,(2m+2)$
Durch Subtraktion von 1 folgt $2m-1 = 1\,\omega\,(2m+1)$.

struiert werden können. Ist nämlich eine Funktion f(z) unter geeigneten Nebenbedingungen eindeutig in den Ausdruck $\varphi(a, z) + \varphi(b, z) + \ldots$ entwickelbar, wo $\varphi(x, z)$ eine gegebene Funktion ist, so kann f(z) als Ersatz für die Menge $(a\,\omega b\omega \ldots)$ gelten. Die Verknüpfung der Objekte a, b, ... durch die Funktion φ erscheint mir aber deswegen weniger vorteilhaft, weil sie viel inniger, spezieller und eingeschränkter ist als eine Verknüpfung durch die Operation ω. Letztere, d. i. eine blosse Aneinanderreihung oder Nebeneinanderstellung, wenn man will, ist aber zum Zwecke einer Abzählung allein vonnöten; was darüber hinausgeht, ist überflüssig und hat nichts mit der Natur des Problems zu schaffen. So erfordert die Behandlung mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln funktionentheoretische Untersuchungen, Konvergenzbeweise für $\Sigma\varphi$ und andere zeitraubende Nachforschungen, die den Einblick in das Wesen des Problems nur erschweren; geht man von der Menge (a, b, ...) aus, so kommen derartige Fragen gar nicht zum Vorschein.

Dies war der eine Grund, warum im vorausgehenden die Mengenrechnung zur Anwendung gelangte; der andere liegt darin, dass es Fälle gibt, in denen die Symbolik der Mengenrechnung nicht durch den Funktionsbegriff ersetzt werden kann. Die folgende einfache Darstellung von Mengen durch $(m + m')\,m''$ oder $(m\,m') + m''$ hat in der gewöhnlichen Algebra kein Analogon, da es zu den Rechnungsarten der Arithmetik keine zwei wesentlich verschiedenen Rechnungsarten mit der Eigenschaft der Distributivität gibt.

Halten wir an der Darstellung der Menge a, b, ... durch die Summe $\varphi(a, z) + \varphi(b, z) + \ldots$ fest, so wird ein α maliges Auftreten von a als Mengenelement ein α maliges Auftreten von $\varphi(a, z)$ als Summand zur Folge haben. Eine Menge $a\,\underline{\alpha},\ b\,\underline{\beta}, \ldots$ wird also durch $\alpha\,\varphi(a, z) + \beta\,\varphi(b, z) + \ldots$ darzustellen sein.

Wir haben im vorausgehenden aus der natürlichen Zahlenmenge mit Hilfe der zu ω distributiven Multiplikation die Mengen $m^{[2]}, m^{[3]}, \ldots$ erzeugt und aus diesen dann schliesslich die Mengen M und μ zusammengesetzt. Allgemeiner hatten wir als Produkt zweier Mengen $(a_1, b_1, \ldots)$ und $(a_2, b_2, \ldots)$ die Menge $(a_1 a_2, b_1 a_2, \ldots)$ definiert. Soll jetzt der Umstand, dass letztere Menge aus den beiden ersten durch eine kommutative Verknüpfung entstanden ist, auch noch für eine Darstellung der betreffenden Mengen mit Hilfe der φ bestehen bleiben, so muss:

$$[\varphi(a_1, z) + \varphi(b_1, z) + \ldots] \,\Omega\, [\varphi(a_2, z) + \varphi(b_2, z) + \ldots] = \varphi(a_1 a_2, z) + \varphi(b_1 a_2, z) + \ldots;$$

dann definiert diese Gleichung bei gegebenem φ eine eigenartige Operation Ω; will man, dass Ω eine arithmetische Verknüpfung darstelle, so sind Ω und φ durch diese Gleichung völlig bestimmt.[1])

Als Spezialfall der Gleichung hat man nämlich:

$$\varphi(a_1, z) \,\Omega\, \varphi(a_2, z) = \varphi(a_1 a_2, z)$$

dann ist aber:

$$[\varphi(a_1, z) + \varphi(b_1, z) + \ldots] \,\Omega\, \varphi(a_2, z) = \varphi(a_1 a_2, z) + \varphi(b_1 a_2, z) + \ldots = \varphi(a_1, z) \,\Omega\, \varphi(a_2, z) + \varphi(b_1, z) \,\Omega\, \varphi(a_2, z) + \ldots$$

d. h. Ω ist eine zur Addition distributive Rechnungsart. Das ist aber, wie bekannt, nur die Multiplikation.

Danach erhalten wir sofort:

$$\varphi(a_1, z)\ \varphi(a_2, z) = \varphi(a_1 a_2, z)$$

daraus folgt aber $\varphi(a, z) = a^{\varphi(z)}$.

Mit Hilfe dieser Funktion lassen sich alle Mengen-Gleichungen, in denen nur Produkte, nicht aber Summen von Mengen auftreten, unter vollständiger Analogie mit der ursprünglichen Form der Gleichung in die Algebra übertragen, nur

---

[1]) Es ist dabei von einer willkürlichen Konstanten (die gleich 1 angenommen wurde) und einer willkürlichen Funktion von z, die in die Lösung eingehen, abgesehen.

treten besondere Nachweise über die Konvergenz der $\Sigma\varphi$ neu hinzu. So haben wir für $\varphi(z) = -z$ als Gegenstück zu der Gleichung (13)

$$(1, 2, \ldots) = \frac{1}{(1 \omega 2)\ (1 \omega 3) \ldots}$$

die bekannte Euler'sche Gleichung:

$$1^{-z} + 2^{-z} + \ldots = \frac{1}{(1-2^{-z})\ (1-3^{-z}) \ldots},$$

und an Stelle von:

$$2,\ 3,\ \frac{4}{|2},\ 5, \ldots = \mathrm{Log}\,(1, 2, \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (17;\ 16;\ 19)$$

die andere:

$$2^{-z} + 3^{-z} + \frac{4^{-z}}{2} + 5^{-z} + \ldots = \lg(1^{-z} + 2^{-z} + \ldots) \quad . \quad . \quad (24$$

Indessen hat z. B. der Ausdruck $2m + 1 = 2.(1, 2, \ldots) + 1$ bei Benützung der Funktion a^{-z} kein Analogon, worauf ausdrücklich hingewiesen sei.

Haben wir ein Analogon für den Mengenbegriff gefunden, so brauchen wir nur noch einen Ersatz für die Operation des Abzählens. Dieser Ersatz wird natürlich ganz und gar von der Wahl der Funktion $\varphi(a, z)$ abhängen.

So ist für $\varphi(a, z) = a^{-z}$ die Anzahlfunktion

$$A_x(a, b, \ldots) = \frac{1}{2\pi i} \int_{n-i\infty}^{n+i\infty} \frac{x^z\,(a^{-z} + b^{-z} + \ldots)}{z}\, dz,^{1})$$

wenn x keine der Menge a, b, ... angehörige Zahl ist; in letzterem Falle ist das angegebene Integral einfach gleich dem arithmetischen Mittel aus A_x und demnächst vorhergehenden Funktionswert von A_x; man kann nämlich zeigen, dass

[1]) Die Grössen a, b, ... sind sämtlich positiv angenommen; Konvergenzbeweise und Giltigkeitsdiskussionen sind, um den Gedankengang nicht zu stören, absichtlich überall unterlassen.

$\frac{1}{2\pi i}\int_{n-i\infty}^{n+i\infty}\frac{p^z\,dz}{z}$ die Werte $1, \frac{1}{2}$ oder 0 hat, je nachdem $p \gtreqless 1$ ist.

Speziell ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{n-i\infty}^{n-i\infty}\frac{x^z \lg(1^{-z}+2^{-z}+\ldots)}{z}\,dz = \begin{cases}\frac{A_{(x)}+A_{(x-1)}}{2};\\ A_{(x)};\end{cases}$$

je nachdem x eine ganze Zahl ist oder nicht.

Der Unterschied zwischen Riemanns Resultat und dem oben gegebenen ist einzig der, dass Riemann die Zerlegung von $1^{-z}+2^{-z}+\ldots=\zeta(z)$ in Faktoren benützt, während unser Ergebnis durch Benützung der Gleichung

$$\lg\zeta(z)=\frac{\zeta(z)-1}{1}-\frac{(\zeta(z)-1)^2}{2}+\frac{(\zeta(z)-1)^3}{3}-\ldots$$ hervorgeht.

Es ist nämlich aus der Bedeutung von $\frac{1}{2\pi i}\int_{n-i\infty}^{n+i\infty}\frac{p^z\,dz}{z}$ unmittelbar ersichtlich, dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{n-i\infty}^{n+i\infty}\frac{x^z(\zeta(z)-1)^\nu\,dz}{z} = \begin{cases}\frac{A_x(m\omega 1)^{[\nu]}+A_{x-1}(m\omega 1)^{[\nu]}}{2};\\ A_x(m\omega 1)^{[\nu]};\end{cases}$$

je nachdem x eine ganze Zahl ist oder nicht.

Wählt man $\varphi(a,z)=\frac{1}{a-z}-\frac{1}{a}$, so entspricht der Menge M die Summe:

$$\lim_{p=\infty}\left[\frac{1}{2-z}+\frac{1}{3-z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4-z}+\ldots+\frac{A_p-A_{p-1}}{p-z}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\ldots+\frac{A_p-A_{p-1}}{p}\right)\right]$$

$$=z\lg\zeta(2)+z^2\lg\zeta(3)+z^3\lg\zeta(4)+\ldots \quad (24)$$

Die abzählende Funktion erhält man hier, wie sofort zu sehen, bis auf den Faktor $2\pi i$, durch Integration um eine geschlossene Kurve, innerhalb derer die Punkte 1, 2, ... liegen.

Setzt man $\varphi(a, z) = \left(1 - \cos\frac{z}{a}\right)$, so wird M ersetzt durch:

$$M_z = \left(1 - \cos\frac{z}{2}\right) + \left(1 - \cos\frac{z}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{z}{4}\right) + \ldots$$

$$= \frac{z^2}{2!}\lg\zeta(2) - \frac{z^4}{4!}\lg\zeta(4) + \ldots; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

dann ist $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{z}{x}\right)}{z} \cdot M_z\, dz = \frac{A_{(x)} + A_{(x-1)}}{2}$;

$$= A_{(x)};$$

jenachdem x eine ganze Zahl ist oder nicht.

Das Integral $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(\frac{z}{x}\right)(1 - \cos za)\, dz$ hat nämlich für $\frac{1}{x} > 0$ die Werte 1, $\frac{1}{2}$ oder 0, je nachdem $\frac{1}{x} \lessgtr a$ ist.

Wie wir auch das Problem behandeln, immer müssen wir von einem Ausdruck ausgehen, der uns die Primzahlen- oder eine damit zusammenhängende Menge ersetzt; immer müssen wir dann eine wirkliche Abzählung an diesem Ausdruck vornehmen, sei es durch bestimmte Integration oder irgend eine andere Operation.

Vielleicht ist es möglich von diesem Wege abzuweichen, wenn man darauf verzichtet, eine völlig exakte Darstellung von $A_{(x)}$ zu suchen. Es kann ja z. B. eine Funktion $\mathfrak{A}_x$ verlangt werden, die nur für ganzzahlige x mit $A_{(x)}$ übereinstimmt. Eine solche Funktion ist z. B. definiert durch die Gleichung:

$$\mathfrak{A}_x^{(\varkappa)} - \mathfrak{A}_{x-1}^{(\varkappa)} = -\frac{\varkappa \cdot x^{\varkappa - 1} \cdot \sin 2\pi x}{2\pi}$$

$$\times\left(\frac{1}{2^\varkappa - x^\varkappa} + \frac{1}{3^\varkappa - x^\varkappa} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^\varkappa - x^\varkappa} + \ldots + f(x)\right) \quad (24)$$

$$= -\frac{\varkappa \cdot \sin 2\pi x}{2\pi x}$$

$$\times\left(x^\varkappa \lg\zeta(\varkappa) + x^{2\varkappa}\lg\zeta(2\varkappa) + x^{3\varkappa}\lg\zeta(3\varkappa) + \ldots + f(x)\right); \quad (25$$

f (x) kann irgendwelche ganze rationale oder transszendente Funktion sein.

Man kann also mit grösster Leichtigkeit die verschiedensten Darstellungen für A_x angeben; trotzdem ist es bisher noch nicht gelungen, einen allen Anforderungen der Praxis entsprechenden Ausdruck zu konstruieren. Entweder erfordert seine Berechnung solch mühselige Nebenrechnung, dass man wieder, wie bei der Formel von Meissel, zu einer Abzählung an der Primzahlenmenge selbst greift, oder der Ausdruck konvergiert dort, wo man ihn braucht, nicht, wie die letztangeführten Reihen, oder endlich, der Bereich seiner Anwendbarkeit bleibt, wie im Riemann'schen Ausdruck, infolge der unbekannten Nullpunkte der ζ Funktion selbst unbekannt.

Zur Vollständigkeit seien noch einige Literaturangaben gemacht:

C. Aiello, Sul numero dei numeri primi inferiori ad un dato limite. Giornale di matematiche di Battaglini. 34, 14—20.

J. Braun, Das Fortschreitungsgesetz der Primzahlen durch eine transszendente Gleichung exakt dargestellt. Programm Nr. 496. Trier 1899.

J. P. Gram, Note sur le problème des nombres premiers. Kjöbenhavn Oversigt, 1897, 235—251.

J. Hadamard, Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. Bulletin de la Société Mathématique de France 24, 199—220.

E. Landau, Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers. Ibid. 28, 25—38.

H. Laurent, Sur la théorie des nombres premiers. Comptes Rendus 126, 809—810.

E. Meissel, Über die exakte Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen. Programm. Iserlohn. 1869.

B. Riemann, Gesammelte Werke. Leipzig 1876. S. 136 ff.

Fr. Rogel, Entwicklungen einiger zahlentheoretischen Funktionen in unendliche Reihen. Sitzungsberichte der Kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1897.

H. v. Schaper, Über die Theorie der Hadamard'schen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen. Göttingen. Dissert. 1898.

Ch. de La Vallée-Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 20.

Lebenslauf.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit wurde am 31. August 1881 als Sohn des Kaufmanns Carl Wallner zu Augsburg geboren. Er besuchte die Volksschule sowie das Kgl. Alte Gymnasium zu Regensburg. Nach Ablegung des Gymnasialabsolutoriums bezog er im Herbst 1900, gleichzeitig Angehöriger des Kgl. Maximilianeums, die Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München, um sich dem Studium der mathematischen Wissenschaften zu widmen.